בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ"ד, מועד א'

5.9.2024, ב' באלול התשפ"ד

מרצים: אחיה בר-און, שמעון ברוקס, דורון פרלמן, ארז שיינר.

מתרגלים: עידו גולדנברג, רועי חסון, שירה ידעי, יונתן סמידוברסקי, עידו פלדמן, עידו קצב, רועי רונן.

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות .
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (9 נקודות כל סעיף) תהא U קבוצה ותהיינה $A, B \subseteq U$. לכל תת קבוצה $X \subseteq U$ נסמן את המשלים $X^c = U \setminus X$. בנוסף, לכל שתי קבוצות S_1, S_2 נסמן את ההפרש הסימטרי $S_1 \triangle S_2$ להיות הקבוצה $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)$.
הוכיחו או הפריכו את הבאים:

(א) $(A \triangle B)^c = A \cap B$.

(ב) $P(A \triangle B) \neq P(A) \triangle P(B)$.

(ג) $A \setminus B = B^c \setminus A^c$.

2. (9 נקודות כל סעיף) נגדיר יחס R על $\mathbb{Z}$ על ידי הכלל

$$aRb \iff \exists c \in \mathbb{Z} : \; a^2 - b^2 = 3c$$

(א) הוכיחו כי R יחס שקילות על $\mathbb{Z}$.

(ב) הוכיחו כי $\mathbb{Z} = [0]_R \cup [1]_R$ (כאשר $[x]_R$ היא מחלקת השקילות של x). רמז: מותר להשתמש בכך שכל מספר שלם הוא מהצורה $3n + k$ עבור איזה שהוא n שלם ו $k \in \{0, 1, 2\}$.

3. הגדרה: לכל x ממשי מגדירים את $\lfloor x \rfloor$, הערך השלם התחתון של x, להיות

$$\lfloor x \rfloor = \max \{ z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x \}$$

כלומר: המספר השלם הכי גדול שמקיים שהוא קטן שווה מ x. למשל $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$.

נגדיר יחס T על $\mathbb{R}$ על ידי הכלל

$$xTy \iff (x = y) \vee (\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor)$$

ענו על הבאים:

(א) (7 נקודות) הוכיחו כי T יחס סדר חלקי על $\mathbb{R}$.

(ב) (7 נקודות) האם T יחס סדר משווה/מלא/לינארי (כל אחד והמינוח שראה בהרצאה)? הוכיחו תשובתכם.

(ג) (4 נקודות כל תת סעיף) עבור הקטע $B = [0, 1] = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \}$ הוכיחו או הפריכו:

i. קיים $\sup B$.

ii. קיים $\inf B$.

4. (7 נקודות כל סעיף) תהא A קבוצה ותהא $f : A \to A$ פונקציה.
נסמן $f^n = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{n \text{ פעמים } f}$ את ההרכבה של f על עצמה n פעמים. עבור $n = 1$ נגדיר $f^1 = f$.
נתון שקיים $m \geq 1$ טבעי כך ש $f^{m+1} = f^m$. ענו על הבאים:

(א) הוכיחו באינדוקציה כי לכל k טבעי מתקיים $f^{m+k} = f^m$.

(ב) הוכיחו: אם f פונקציה חח"ע אזי $f = I_A$ (תזכורת I_A היא פונקצית הזהות על A).

(ג) הוכיחו: אם f פונקציה על אזי $f = I_A$.

5. (7 נקודות כל סעיף) קבעו את העוצמה של כל אחת מהקבוצות A, B, C הבאות, קבעו האם העוצמה סופית, $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}$ או אחרת (לקבוצה של דורון: $c = \aleph$):

(א) הקבוצה A המוגדרת

$$A = \{(S_1, S_2) \in P(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}) \mid S_1 \subseteq S_2\}$$

כלומר זוגות סדורים (S_1, S_2) של תתי קבוצות של $\mathbb{R}$ המקיימות $S_1 \subseteq S_2$.

(ב) הקבוצה B המוגדרת להיות קבוצת כל הפונקציות $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקיימות $f^{-1}[\mathbb{N}]$ מעוצמה $\aleph_0$.

(ג) הקבוצה C המוגדרת להיות קבוצת כל הפונקציות $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ המקיימות: לכל n טבעי קיים m טבעי כך ש $f(m) \geq n$.