אלגברה לינארית 1 למדמ"ח, 89-112, פתרון בוחן תשפ"ב

י"ח בכסלו ה'תשפ"ב, 22.11.2021

מרצה: עדי בן צבי.

מתרגלים: אריאל ויצמן, רועי חסון, כנה נהיר, אלעד עטייא, הראל רוזנפלד.

- מבנה הבוחן וניקוד: יש לענות על כל השאלות. כל סעיף שווה 21 נק'. לא ניתן לקבל מעל 100 נק' בבוחן.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: 90 דקות.
- חומר עזר: אין.
- נמקו היטב את תשובותיכם!

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. נתונה מערכת משוואות מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+y-z & =1 \\ 3x-7y+(a^2+1)z & =a^2-1 \\ 4x-6y+(a+2)z & =4 \end{cases}$$

(א) לאילו ערכים של $a\in\mathbb{R}$ למערכת אין פתרון/ יש פתרון יחיד/ יש אינסוף פתרונות? הוכיחו את תשובתכם.

(ב) לאילו ערכים של $a\in\mathbb{R}$ הוקטור $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ מהווה פתרון יחיד למערכת?

פתרון :

א. נדרג ונראה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & a^2+1 & a^2-1 \\ 4 & -6 & a+2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-4R_1]{R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & a^2+4 & a^2-4 \\ 0 & -10 & a+6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & a^2+4 & a^2-4 \\ 0 & 0 & a+2-a^2 & -a^2+4 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & a^2+4 & (a-2)(a+2) \\ 0 & 0 & (a-2)(a+1) & (a-2)(a+2) \end{array}\right)$$

כעת:

- אם $a=-1$ אז שורה שלישית שורת סתירה ואין פתרון למערכת.
- אם $a=2$ נקבל שאין שורת סתירה ויש משתנה חופשי ולכן אינסוף פתרונות.
- לכל $a\notin\{-1,2\}$ נקבל צורה מדורגת ללא סתירה וללא חופשיים ולכן פתרון יחיד.

ב. בין אם מסתכלים על המטריצה המקורית ובין אם מסתכלים על הצורה המדורגת שלה, אם זהו פתרון נקבל מהכפלת המטריצה בפתרון ש- $a^2-4=0$ וזה נכון אמ"ם $a=\pm 2$. אבל אם $a=2$ אז יש אינסוף פתרונות, ולכן וקטור זה מהווה פתרון יחיד עבור $a=-2$ בלבד.

2. נתונה מטריצה $A\in\mathbb{R}^{4\times 5}$.

(א) נתון שבצורה המדורגת של A ישנו משתנה חופשי אחד. הוכיחו שלכל $b\in\mathbb{R}^{4\times 1}$ מתקיים: למערכת $Ax=b$ יש אינסוף פתרונות.

(ב) בנוסף לנתון בסעיף הקודם, נתון:

$$A\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-3&-4\\-2&1&4\\-1&0&-2\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-4&-9\\0&4&21\\0&-7&-13\\0&6&-6\end{pmatrix}$$

מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת $Ax=\begin{pmatrix}-4\\4\\-7\\6\end{pmatrix}$. הוכיחו את תשובתכם.

פתרון :

א. יהי $b\in\mathbb{R}^{4\times1}$. מכיון שבצורה המדורגת של A ישנו משתנה חופשי אחד, ובסה"כ יש חמישה משתנים, לכן יש ארבעה משתנים תלויים, מה שאומר שיש ארבעה איברים מובילים - כלומר, בכל שורה ישנו איבר מוביל. לכן נקבל שבצורה המדורגת של A אין שורת אפסים (כי איבר מוביל תמיד שונה מאפס), ולכן בצורה המדורגת של $\left(\begin{array}{c|c}A&b\end{array}\right)$ אין שורת סתירה. בסה"כ אין שורת סתירה ויש משתנה חופשי, ולכן יש אינסוף פתרונות.

ב. נשים לב, שלפי כפל עמודה עמודה מתקיים:

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

באופן כללי, אם $Av=0$ אז לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים: $A(tv)=t\cdot(Av)=t\cdot0=0$, מה שאומר שגם הוקטור tv הוא פתרון למערכת $Ax=0$. מכיון שנתון שיש רק משתנה חופשי אחד נוכל לסכם שקבוצת הפתרונות למערכת ההומ' $Ax=0$ היא:

$$H=\left\{t\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}$$

בנוסף, לפי כפל עמודה עמודה, נקבל פתרון פרטי למערכת המבוקשת, שהרי:

$$A\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\-7\\6\end{pmatrix}$$

ולכן הוקטור $v_0=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ מהווה פתרון פרטי למערכת המבוקשת. לפי משפט, אם H קבוצת פתרונות של מערכת הומוגנית $Ax=0$, $L\neq\emptyset$ קבוצת פתרונות של $Ax=b$ ו־v_0 פתרון פרטי (כלומר, $Av_0=b$) אז:

$$L=\{v_0+v\mid v\in H\}$$

ולכן אצלנו קבוצת הפתרונות היא:

$$L=\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}$$

3. תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות. נתון: A סימטרית, B אנטי־סימטרית. הוכיחו: $tr(AB)=0$.

פתרון :

לפי הנתון מתקיים $A^t=A, B^t=-B$. כעת מתכונות העקבה נקבל:

$$tr(AB)=tr\left((AB)^t\right)=tr(B^tA^t)=tr(-BA)=-tr(BA)=-tr(AB)$$

אפשר גם לפתוח עם סיגמות, אם רוצים::

$$tr(AB)=\sum_{k=1}^{n}(AB)_{k,k}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}A_{k,t}B_{t,k}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}A^t_{t,k}B^t_{k,t}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}A_{t,k}\left(-B_{k,t}\right)=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}B_{k,t}A_{t,k}=-tr(BA)=-tr(AB)$$

כך או כך,קיבלנו $2tr(AB) = 0$, ובגלל שאנחנו מעל הממשיים אז $tr(AB) = 0$.