שאלה 1.8

א. T לא העתקה ליניארית כי אם ניקח $z \in \mathbb{C}$ נקבל שקיים $\alpha \in \mathbb{C}$ שעבורו מתקיים $T(\alpha z) = \overline{\alpha z} = \overline{\alpha} T(z) \neq \alpha T(z)$.

ב. T העתקה ליניארית. הוכחה:

יהיו $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}$ כעת מכיוון ש $\alpha \in \mathbb{R}$ נקבל $\alpha = \overline{\alpha}$ ואז

$T(z_1 + \alpha z_2) = \overline{z_1 + \alpha z_2} = \overline{z_1} + \overline{\alpha} \cdot \overline{z_2} = T(z_1) + \alpha T(z_2)$.

שאלה 1.10

א. בדיקה ישירה לפי ההגדרה.

ב. כנ"ל

ג. לשם כך נשים לב שמתקיים

$$T(x,y) = (x+2y, 2x+y) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^t$$

$$T(v) = v^t A \ , \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ואז הליניאריות של T נובעת ישירות מסעיף ב'.

ד. $T(v) = Av + b$ אינה הע"ל (עבור $b \neq 0$) כי , למשל, לא מתקיימת התכונה של

$$T(\alpha v) = A(\alpha v) + b = \alpha Av + b$$

הכפל בסקלר: $\alpha T(v) = \alpha(Av + b) = \alpha Av + \alpha b$

$$\rightarrow \forall \alpha \in F \ \ \alpha b = b \rightarrow b = 0$$

ה. באופן דומה להוכחות בסעיפים הקודמים.

שאלה 1.11

א. נניח שקיים צירוף ליניארי $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0_V$. נוכיח שהוא טריוויאלי. נפעיל T על שני האגפים ונשתמש בכך ש T הע"ל כדי לקבל $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) = T(0_V) = 0_W$. קיבלנו $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) = 0_W$ אבל נתון $T(v_1), \dots T(v_n)$ בת"ל לכן מדובר בצירוף ליניארי טריוויאלי ומכאן גם הצירוף הליניארי $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0_V$ הוא טריויאלי ו $v_1, \dots v_n$ בת"ל.

ב. נניח שקיים צירוף ליניארי $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=0_W$. נוכיח שהוא טריוויאלי. נשתמש בכך ש T הע"ל כדי לקבל $T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}T(\alpha_i v_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=0_W=T(0_V)$. מכיון ש T חח"ע נקבל $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=0_V$ ולבסוף ניעזר בכך ש $v_1,\dots v_n$ בת"ל כדי לקבל הדרוש.

<u>שאלה 1.19</u>

תהי $T:V\to U$ הע"ל הפיכה. נוכיח ש- $T^{-1}:U\to V$ היא הע"ל. לפי הנתון מתקיים $T^{-1}T=I_V$, $TT^{-1}=I_U$. נבדוק את שני התנאים של ההעתקה הליניארית בשלב אחד:

יהיו $\alpha\in F$, $u_1,u_2\in U$ אזי:

$$T^{-1}(\alpha u_1+u_2)=T^{-1}\left(\alpha T\left(T^{-1}(u_1)\right)+T\left(T^{-1}(u_2)\right)\right)=T^{-1}\left(T\left(\alpha T^{-1}(u_1)+T^{-1}(u_2)\right)\right)=$$
$$=\alpha T^{-1}(u_1)+T^{-1}(u_2)$$

<u>שאלה 1.29</u>

<u>טענת עזר 1:</u> תהי $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ קבוצה בת"ל. אזי גם הקבוצה $B'=\{v_1,v_2+v_1,\dots,v_n+v_1\}$ היא בת"ל.

<u>הוכחת טענת עזר 1:</u> נניח בשלילה ש- B' היא ת"ל. אזי קיימים $a_1,a_2,\dots,a_n\in F$ **לא כולם אפס** כך ש- $a_1v_1+a_2(v_2+v_1)+\dots+a_n(v_n+v_1)=0$

אך מתקיים:

$a_1v_1+a_2(v_2+v_1)+\dots+a_n(v_n+v_1)=(a_1+a_2+\dots+a_n)v_1+a_2v_2+\dots+a_nv_n=0$. אך הקבוצה המקורית היא בת"ל ולכן $a_2=0,\dots,a_n=0$, $a_1+\dots+a_n=0$. וקל לראות שכל המקדמים יוצאים אפס, בסתירה להנחה. לכן הקבוצה B' היא בת"ל.

<u>טענת עזר 2:</u> $span\{v_1,v_2,\dots,v_n\}=span\{v_1,v_2+v_1,\dots,v_n+v_1\}$

<u>הוכחת טענת עזר 2:</u> תרגיל!

בחזרה לתרגיל:

תהי $T:V\to W$ הע"ל שאינה העתקת האפס. לכן קיים $0\neq v_1\in V$ כך ש- $T(v_1)\neq 0$. נשלים את v_1 לבסיס של V : $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. אם קיים $2\le i\le n$ עבורו $T(v_i)=0$ אזי נחליף את v_i ב- v_i+v_1 (ואז מובטח ש- $T(v_i+v_1)=T(v_i)+T(v_1)=T(v_1)\neq 0$).

לבסוף נקבל בסיס (לפי טענות העזר, לאחר כל ההחלפות הקבוצה עדיין תשאר בסיס) אשר לכל איבר בו, ההעתקה אינה שולחת אותו לאפס.

שאלה לא מהחוברת:

תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית כך שמתקיים:
$T(1,1)=(1,2,3),\ \ T(0,1)=(4,5,6)$. מצאו את ההעתקה בצורה מפורשת.

<u>פתרון:</u>

נייצג ווקטור כללי ב-$\mathbb{R}^2$ באמצעות הבסיס הנתון: $(x,y)=\alpha(0,1)+\beta(1,1)$. פותרים ומקבלים: $\alpha=y-x\quad \beta=x,$, כלומר: $(x,y)=(y-x)(0,1)+x(1,1)$ נפעיל את ההעתקה על שני האגפים, נשתמש בליניאריות שלה ונקבל:
$T(x,y)=(4y-3x,5y-3x,6y-3x)$.