פתרון תרגיל בית 5 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית
88-373 סמסטר ב' תשפ"א

חוקי המספרים הגדולים

תרגיל 1 (קוביה ממימד גבוה היא כמעט השפה של כדור)**.** יהיו $X_1, X_2, \dots$ ממבתש"ה עם התפלגות $U(-1,1)$. נגדיר $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ כנקודה אקראית בתוך הקוביה ה-n-מימדית. הראו כי לכל $\varepsilon > 0$,

$$P\left((1-\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{3}} < \left\|X^{(n)}\right\|_2 < (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{3}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. נשים לב כי

$$P\left((1-\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{3}} < \left\|X^{(n)}\right\|_2 < (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{3}}\right) = P\left((1-\varepsilon)^2\frac{n}{3} < \left\|X^{(n)}\right\|_2^2 < (1+\varepsilon)^2\frac{n}{3}\right) =$$
$$= P\left((1-\varepsilon)^2\frac{n}{3} < X_1^2 + \cdots + X_n^2 < (1+\varepsilon)^2\frac{n}{3}\right) = (\star)$$

נרצה להשתמש בחוק החלש של המספרים הגדולים. התוחלת של כל X_i^2 היא

$$\mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}t^3\right)_{-1}^{1} = \frac{1}{3},$$

ולכן

$$(\star) = P\left(\left((1-\varepsilon)^2 - 1\right)\frac{1}{3} < \frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n} - \frac{1}{3} < \left((1+\varepsilon)^2-1\right)\frac{1}{3}\right) =$$
$$= P\left(-\frac{2\varepsilon-\varepsilon^2}{3} < \frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n} - \frac{1}{3} < \frac{2\varepsilon+\varepsilon^2}{3}\right)$$

וההסתברות הזו שואפת ל-0 לפי החוק החלש של המספרים הגדולים. $\square$

תרגיל 2. יהיו $X_1, X_2, \dots$ ממבתש"ה. נכתוב $X_1^+ = \max\{X_1, 0\}$, $X_1^- = \max\{-X_1, 0\}$ (כלומר $X_1 = X_1^+ - X_1^-$). נניח כי $\mathbb{E}\left[X_1^+\right] = \infty$ ו-$\mathbb{E}\left[X_1^-\right] < \infty$. הראו כי $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \infty$.

הוכחה. לכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר $Y_{n,k} = \min\{X_n, k\}$, וכן $S_{n,k} = \sum_{i=1}^{n} Y_{i,k}$. נשים לב כי לכל k מתקיים $S_n \geq S_{n,k}$. מצד שני, $\mathbb{E}[Y_{n,k}] = \mu_k < \infty$ היא מספר סופי כי החלק השלילי הוא עם תוחלת סופית והחלק החיובי חסום. לכן $\frac{S_{n,k}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s.}} \mu_k$. ממשפט ההתכנסות המונוטונית, $\mu_k = \mathbb{E}[Y_{1,k}] \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbb{E}[X_1] = \infty$, ומכאן נקבל את הדרוש. $\square$

תרגיל 3. באמצעות החוק החלש של המספרים הגדולים, הוכיחו את משפט הקירוב של ויירשטראס מאנליזה (ההוכחה של Levasseur משנת 1984): אם $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, אז ניתן לקרב את f על ידי פולינומים. במפורש, לכל $\varepsilon > 0$ קיים פולינום $p(x)$ כך ש-$\|f - p\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$.
כדאי להיעזר בהדרכה הבאה:

א. לכל $x \in [0,1]$, יהי $S_n \sim \text{Bin}(n, x)$. הוכיחו כי $B_n(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$ הוא פולינום ב-x ממעלה לכל היותר n (הנקרא גם **פולינום ברנשטיין** של f).

ב. הסיקו מהחוק החלש של המספרים הגדולים כי $B_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ לכל x בנפרד.
זה מראה התכנסות נקודתית, אבל אנחנו רוצים התכנסות בנורמת אינסוף, אז נצטרך קצת להתאמץ יותר.

ג. הראו כי לכל $x \in [0,1]$ ולכל $\delta > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$ – חסם שאינו תלוי ב-x (באמצעות אי-שוויון צ'בישב).

ד. באמצעות כך ש-f רציפה במידה שווה וחסומה (כי היא רציפה והתחום שלה הוא קטע סגור), הוכיחו את משפט הקירוב של ויירשטראס.

הוכחה.

א. אפשר לכתוב ישירות את הביטוי של $B_n(x)$:

$$B_n(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

ולכן זהו פולינום ממעלה לכל היותר n.

ב. נשים לב כי S_n הוא סכום של n משתני ברנולי עם תוחלת x. לפי החוק החלש של המספרים הגדולים, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} x$, ובפרט מההתכנסות החלשה נקבל $B_n(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

ג. כזכור, $\mathbb{E}[S_n] = nx$ ו-$\text{Var}(S_n) = nx(1-x)$. כיוון ש-$x \in [0,1]$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, ולכן

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right) = P(|S_n - nx| \geq n\delta) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

ד. יהי $\varepsilon > 0$. f היא פונקציה רציפה על קטע סגור. לכן היא חסומה, כלומר קיים $M \geq 0$ כך ש-$|f(x)| \leq M$ לכל $x \in [0,1]$, והיא רציפה במידה שווה: קיים $\delta > 0$

כך שלכל $x,y\in[0,1]$ עם $|x-y|\le\delta$, מתקיים $|f(x)-f(y)|\le\varepsilon$. לכן לכל $x\in[0,1]$ מתקיים

$$|B_n(x)-f(x)|=\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]-f(x)\right|=\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right]\right|\le\mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\right]=$$
$$=\mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\cdot 1_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\le\delta\right\}}\right]+\mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\cdot 1_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\delta\right\}}\right].$$

נחסום כל תוחלת בנפרד. עבור התוחלת הראשונה, אם $\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\le\delta$ אז $\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\le\varepsilon$, ולכן

$$\mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\cdot 1_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\le\delta\right\}}\right]\le\varepsilon.$$

עבור התוחלת השנייה, ניעזר בסעיף הקודם:

$$\mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\cdot 1_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\delta\right\}}\right]\le M\cdot P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\delta\right)\le\frac{M}{4n\delta^2}.$$

אם ניקח n מספיק גדול שעבורו $\frac{M}{4n\delta^2}\le\varepsilon$, כלומר $n\ge\frac{M}{4\varepsilon\delta^2}$, נקבל $|B_n(x)-f(x)|\le 2\varepsilon$, כנדרש.

$\square$

התכנסות חלשה

תרגיל 4. ניקח משתנים מקריים $X_1,X_2,\ldots$ כך ש-$P\left(X_n=\frac{1}{n}\right)=1$. הראו כי $X_n\xrightarrow{\mathrm{d}}0$, למרות שפונקציות ההתפלגות המצטברות לא מתכנסות בכל נקודה של $\mathbb{R}$. מדוע אין זו סתירה להגדרה?

פתרון. פונקציית ההתפלגות המצטברת של כל X_n היא $F_{X_n}(t)=\begin{cases}0, & t<\frac{1}{n}\\ 1, & t\ge\frac{1}{n}\end{cases}$. לכן הגבול שלהן בכל נקודה $t\neq 0$ הוא $F_{X_n}(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$. פונקציית ההתפלגות של $X=0$ היא $F_X(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$, ולכן קיבלנו התכנסות בכל נקודה שונה מ-0, כלומר בכל נקודת רציפות של F_X, למרות שאין התכנסות עבור $t=0$.

תרגיל 5. יהי X_n משתנה מקרי בדיד המתפלג אחיד על הקבוצה $\{1,\ldots,n\}$. הראו כי $\frac{1}{n}X_n\xrightarrow{\mathrm{d}}U[0,1]$.

פתרון. נסמן $X\sim U[0,1]$. תהי $t\in\mathbb{R}$, $t\neq 0,1$. אם $t<0$ או $t>1$ ברור כי $F_{\frac{1}{n}X_n}(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}F_X(t)$. לכן נניח $0<t<1$. במקרה הזה

$$F_{\frac{1}{n}X_n}(t)=F_{X_n}(tn)=\frac{1}{n}\lfloor tn\rfloor\xrightarrow[n\to\infty]{}t=F_X(t)$$

כנדרש.

תרגיל 6. יהיו $X, X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots$ משתנים מקריים כך ש-$Y_n - X_n \xrightarrow{P} 0$ ו-$X \xrightarrow{\mathrm{d}} X_n$. הראו כי $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

הוכחה. תהי t נקודת רציפות של F_X. נזכור כי F_X מונוטונית, לכן יש לה לכל היותר מספר בן מנייה של נקודות אי-רציפות. לכל $\varepsilon > 0$ כך ש-$t+\varepsilon$ נקודת רציפות של F_X,

$$F_{Y_n}(t) = P(Y_n \le t) = P(Y_n \le t, X_n \le t+\varepsilon) + P(Y_n \le t, X_n > t+\varepsilon) \le$$
$$\le P(X_n \le t+\varepsilon) + P(|X_n - Y_n| \ge \varepsilon) = F_{X_n}(t+\varepsilon) + P(|X_n - Y_n| \ge \varepsilon)$$

נשאיף $n \to \infty$. הגורם הראשון ישאף ל-$F_X(t+\varepsilon)$ מההתכנסות בהתפלגות, והשני ל-0 מההתכנסות בהסתברות. לכן לכל $\varepsilon > 0$ כך ש-$t+\varepsilon$ נקודת רציפות של F_X,

$$F_{Y_n}(t) \le F_X(t+\varepsilon).$$

אבל לפי הטיעון הנ"ל יש אינסוף ε-ים כאלו ואפילו אפשר למצוא סדרה שלהם ששואפת ל-0, ומהרציפות מימין נקבל $F_{Y_n}(t) \le F_X(t)$.

אם נחליף את X_n ו-Y_n בטיעון הנ"ל, נקבל

$$F_{X_n}(t) \le F_{Y_n}(t+\varepsilon) + P(|X_n - Y_n| \ge \varepsilon).$$

אם ניקח $s = t+\varepsilon$, אז

$$F_{X_n}(s-\varepsilon) \le F_{Y_n}(s) + P(|X_n - Y_n| \ge \varepsilon)$$

ומטיעון דומה לקודם נקבל $F_{Y_n}(s) \ge F_X(s)$. זה יוכיח את השוויון הדרוש. $\square$

תרגיל 7. הוכיחו את השקילות הבאה מלמת Portmanteau: $X_n \xrightarrow{w} X$ אם ורק אם לכל פונקציה רציפה ואי-שלילית $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מתקיים $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[h(X_n)] \ge \mathbb{E}[h(X)]$.
(רמז לכיוון אחד: אם h רציפה ואי-שלילית, $\max\{h, N\}$ היא פונקציה רציפה וחסומה.)

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ תהי h רציפה ואי-שלילית. לכל N, $h_N(x) = \min\{h(x), N\}$ היא פונקציה רציפה וחסומה. מההנחה, $\mathbb{E}[h(X_n)] \ge \mathbb{E}[h_N(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[h_N(X)]$, ובפרט $\liminf \mathbb{E}[h(X_n)] \ge \mathbb{E}[h_N(X)]$. כעת נוכל להפעיל את משפט ההתכנסות המונוטונית $\mathbb{E}[h_N(X)] \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathbb{E}[h(X)]$, ונקבל את אי-השוויון הדרוש.

$\boxed{\Rightarrow}$ תהי h רציפה וחסומה. אם $|h(x)| \le M$, אז $g(x) = h(x) + M$ היא פונקציה רציפה ואי-שלילית, ולכן

$$\liminf \mathbb{E}[h(X_n)] + M = \liminf \mathbb{E}[g(X_n)] \ge \mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[h(X)] + M$$

כלומר $\liminf \mathbb{E}[h(X_n)] \ge \mathbb{E}[h(X)]$. אם נפעיל את אותו הטריק על $-h$, נקבל $\limsup \mathbb{E}[h(X_n)] \le \mathbb{E}[h(X)]$. בסך הכל נקבל שוויון $\lim \mathbb{E}[h(X_n)] = \mathbb{E}[h(X)]$. $\square$

בהצלחה!