

## לינארית 2 - מבחן לדוגמא

מרצה: תמר בר־און.  
 מתרגל: אחיה בר־און.  
 עליכם לענות על כל השאלות.  
 משקל כל שאלה 27 נקודות.  
 משך המבחן: 3 שעות.  
 בהצלחה!

1. תהי  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . מצאו  $P$  ו- $D$  אלכסונית, מטריצות ב- $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  כך ש  $P^t A P = D$ .

2. תהינה  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . יהא  $\lambda \in \mathbb{F}$ . הוכיחו כי  $\lambda$  ע"ע של  $AB$  אמ"מ  $\lambda$  ע"ע של  $BA$  [פצלו למקרים:  $\lambda = 0$  ו- $\lambda \neq 0$ ].

3. אין קשר בין הסעיפים.

(א) יהיו  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  ונגדיר  $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2n \times 2n}$ . הוכיחו:  $C$  לכסינה אמ"ם  $A$  ו- $B$  לכסינות.

(ב) יהי  $V$  ממ"פ מעל  $\mathbb{C}$  ויהי  $S : V \rightarrow V$  אופרטור כלשהו. הוכיחו: כל הע"ע של  $S^* S$  גדולים או שווים ל-0.

4. יהי  $V = \mathbb{R}^3$  ו- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  בסיס של  $V$ .

(א) הגדירו מכפלה פנימית על  $V$  כך ש- $B$  יהיה בסיס או"נ ביחס למכפלה זו. (הוכיחו שההגדרה שלכם אכן נותנת מ"פ)

(ב) עבור המ"פ שהגדרתם בסעיף הקודם, מצאו את  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^\perp$