לינארית 2 -פתרון הבוחן

28.5.2018

הנחיות:

- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא מחשבונים או חומר עזר.
- בדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים
  - ת.ז ו\או שם מלא.
  - כדי שנוכל להחזיר את הבחנים ביעיליות ציינו את מספר הקבוצת תרגול שאליה אתם **מגיעים**:
    - 03 - פולה בשני.
    - 05 - פולה בשלישי.
    - 04 - עוזי בשלישי ערב.
    - 06 - עוזי ברביעי בוקר.
    - 07 - עוזי בשלישי בוקר.

שאלה 1.

1. [20 נק] תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה. נסמן ב-

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + .. + a_1\lambda + a_0$$

את הפולינום האופייני, הוכח ש-$a_0 = (-1)^n |A|$.

פתרון.

נציב בפולינום האופייני $\lambda = 0$ ונקבל

$$p_A(0) = 0^n + a_{n-1}0^{n-1} + a_{n-2}0^{n-2} + .. + a_1 0 + a_0 = a_0$$

וצד שני לפי הגדרת הפולינום האופייני נקבל ש-

$$p_A(0) = |0I - A| = |-A| = (-1)^n |A|$$

לכן

$$a_0 = p_A(0) = (-1)^n |A|$$

2. [30 נק] תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש-$|A| < 0$, הוכח שהיא לכסינה.

פתרון.

הפולינום האופייני הוא מהצורה

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$$

בסעיף הקודם הוכחתם ש-

$$c = (-1)^n |A|$$

כלומר במקרה שלנו $n = 2$ לכן $c < 0$, נתבונן בדיסקרימיננטה של הפולינום האופייני ונקבל ש-

$$\triangle = b^2 - 4ac > 0$$

ולכן קיימים שני שורשים ממשיים שונים! מכאן Aלכסינה.

שאלה 2.

1. [20 נק] תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית הפיכה ו-B_1, B_2 בסיסים ל-V הוכח שמתקיים

$$\left[T^{-1}\right]^{B_1}_{B_2} = \left([T]^{B_2}_{B_1}\right)^{-1}$$

פתרון.

נשים לב שמתקיים

$$\left[T\circ T^{-1}\right]_{B_1}^{B_1}=\left[T\right]_{B_1}^{B_2}\left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1}$$

ומצד שני

$$\left[T\circ T^{-1}\right]_{B_1}^{B_1}=\left[Id\right]_{B_1}^{B_1}=I$$

לכן בסהכ נקבל ש-

$$\left[T\right]_{B_1}^{B_2}\left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1}=I$$

לכן

$$\left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1}=\left(\left[T\right]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}$$

2. [30 נק] תהיה $T:\mathbb{R}_2\left[x\right]\to\mathbb{R}_2\left[x\right]$ העתקה לינארית מוגדרת באופן הבא

$$T\left(p\left(x\right)\right)=p\left(1\right)+\left(p\left(1\right)-p\left(0\right)\right)x+\left(\frac{p''\left(5\right)}{2}\right)x^2$$

מצא את T^{-1}. (רמז: מומלץ להיעזר בסעיף 1)

פתרון.

ראשית נמצא את העתקה באופן מפורש

$$\begin{aligned}T\left(a+bx+cx^2\right)&=\\a+b+c+\left(a+b+c-a\right)x+cx^2&=\\a+b+c+\left(b+c\right)x+cx^2&\end{aligned}$$

נמצא את במטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי

$$\left[T\right]_s^s=\begin{pmatrix}\left[T\left(1\right)\right]_S & \left[T\left(x\right)\right]_S & \left[T\left(x^2\right)\right]_S\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left[1\right]_S & \left[1+x\right]_S & \left[1+x+x^2\right]_S\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

נמצא את $\left(\left[T\right]_s^s\right)^{-1}$ בעזרת גאוס גורדן

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&-1\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

לכן

$$\left(\left[T\right]_s^s\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

לפי סעיף 1

$$\left[T^{-1}\right]_s^s=\left(\left[T\right]_s^s\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

כלומר

$$\begin{pmatrix}\left[T^{-1}\left(1\right)\right]_S & \left[T^{-1}\left(x\right)\right]_S & \left[T^{-1}\left(x^2\right)\right]_S\end{pmatrix}=\left[T^{-1}\right]_s^s=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

מכאן

$$\begin{cases} \left[T^{-1}(1)\right]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left[T^{-1}(x)\right]_S = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left[T^{-1}\left(x^2\right)\right]_S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \left[T^{-1}(1)\right]_S = 1 \\ \left[T^{-1}(x)\right]_S = -1 + x \\ \left[T^{-1}\left(x^2\right)\right]_S = -x + x^2 \end{cases}$$

לפי משפט ההגדרה נקבל ש-

$$\begin{aligned} T^{-1}\left(a + bx + cx^2\right) &= \\ aT^{-1}(1) + bT^{-1}(x) + cT^{-1}\left(x^2\right) &= \\ a + b(-1 + x) + c\left(-x + x^2\right) &= \\ a - b + (b - c)x + cx^2 & \end{aligned}$$

בהצלחה!