# תרגיל בית 7

## שאלה 1

בדוק התכנסות והתכנסות בהחלט עבור הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^2+1}}$.

## פתרון שאלה 1

### סעיף א

נשתמש במשפט: אם הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס, אזי גם הטור הכללי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|$ מתכנס ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ מתכנס בהחלט.

### סעיף ב

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right|$ מתבדר ולכן הטור לא מתכנס בהחלט. נבדוק האם הטור מתכנס בתנאי או מתבדר.

נשתמש במבחן לייבניץ: הטור המתחלף $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ מתכנס אם מתקיימים התנאים הבאים:

א. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ב. $a_n>a_{n+1}$ לכל $n$ טבעי.

נשים לב שבטור שלנו הוא טור מתחלף ומתקיים $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

אכן מתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $a_n>a_{n+1}$ לכל $n$ טבעי. תנאי משפט לייבניץ מתקיימים והטור מתכנס בתנאי.

### סעיף ג

$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^2+1}}\neq 0$ ולכן הטור מתבדר.

## שאלה 2

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. אם $a_n>0$ לכל $n$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ מתכנס.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ מתכנס.

## פתרון שאלה 2

א. נכון.

הוכחה:

על פי המשפט: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ נקבל ש $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ולכן לכל $0<\varepsilon$ ובפרט

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ קיים $n_0$ כך שלכל $n_0 \le n$ מתקיים $|a_n| < \frac{1}{2}$. מכיוון ש $a_n > 0$ נקבל ש $0 < a_n < \frac{1}{2}$ ואז

$a_n^2 \le a_n$. על פי מבחן ההשוואה הראשון להתכנסות טורים חיוביים נקבל שמהתכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ומכיוון ש

$a_n^2 \le a_n$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ גם מתכנס.

ב. לא נכון.

דוגמא נגדית:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ מתכנס אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.

**<u>שאלה 3</u>**

א. הוכח בעזרת משפט דריכלה שהטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln n}$ מתכנס.

ב. קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר.

**<u>פתרון שאלה 3</u>**

**<u>סעיף א</u>**

הסדרה $a_n = \frac{1}{\ln n}$ מונוטונית שואפת לאפס ולכן נשאר להראות שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)$ חסום.

נראה שסדרת הסכומים החלקיים $S_n = \sin(1) + \sin(2) + \ldots + \sin(n)$ חסומה.

נכפול פי $2\sin(1)$ בשני האגפים ונקבל

$$2\sin(1) S_n = 2\sin(1)\sin(1) + 2\sin(1)\sin(2) + \ldots + 2\sin(1)\sin(n)$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$.

ואז

$$2\sin(1)\sin(1) + 2\sin(1)\sin(2) + \ldots + 2\sin(1)\sin(n) ==$$
$$(\cos 0 - \cos 2) + (\cos 1 - \cos 3) + (\cos 2 - \cos 4) + (\cos 3 - \cos 5) + \ldots + (\cos(n-1) - \cos(n+1)) =$$
$$= \cos 0 + \cos 1 - \cos n - \cos(n+1)$$

ז"א

$S_n = \frac{\cos 0 + \cos 1 - \cos n - \cos(n+1)}{2\sin 1} \Rightarrow |S_n| \le \frac{4}{2\sin 1}$ וקיבלנו את הדרוש.

**<u>סעיף ב</u>**

הסדרה $a_n = \frac{1}{n}$ מונוטונית שואפת לאפס ולכן נשאר להראות שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)$ חסום.

נראה שסדרת הסכומים החלקיים $S_n=\cos(1)+\cos(2)+...+\cos(n)$ חסומה.

נכפול פי $2\sin(1)$ בשני האגפים ונקבל

$$2\sin(1)S_n=2\cos(1)\sin(1)+2\cos(2)\sin(1)+...+2\cos(n)\sin(1)$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$.

ואז

$$\begin{aligned}&2\cos(1)\sin(1)+2\cos(2)\sin(1)+...+2\cos(n)\sin(1)==\\&(\sin 2-\sin 0)+(\sin 3-\sin 1)+(\sin 4-\sin 2)+(\sin 5-\sin 3)+\\&...+(\sin n-\sin(n-2))+(\sin(n+1)-\sin(n-1))=\\&=-\sin 1+\sin(n+1)-\sin(n-2)\end{aligned}$$

ז"א

$S_n=\dfrac{-\sin 1+\sin(n+1)-\sin(n-2)}{2\sin 1}\Rightarrow|S_n|\le\dfrac{3}{2\sin 1}$ וקיבלנו את הדרוש.

נוכיח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n}\right|$ מתבדר ואז הטור המבוקש מתכנס בתנאי.

מכיוון ש $|\cos n|\le 1$ נקבל ש $\cos^2 n\le|\cos n|$ ולכן מספיק להראות שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}$ מתבדר.

נשתמש בזהות $\cos^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{2}+\frac{1}{2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos 2n}{2n}+\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}$ על פי דריכלה ניתן להראות שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n}$ מתכנס ומכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ מתבדר נקבל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}$ מתבדר והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ מתכנס בתנאי.

## **<u>שאלה 4</u>**

קבע בעזרת מבחן דלאמבר את התכנסות הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!3^n}$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$

## **<u>פתרון שאלה 4</u>**

### **<u>מבחן דלאמבר</u>**

יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור כלשהו. נסמן $L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ אזי:

1. אם $L<1$ $\Leftarrow$ הטור מתכנס בהחלט.
2. אם $L>1$ $\Leftarrow$ הטור מתבדר.
3. אם $L=1$ $\Leftarrow$ לא ניתן להכריע על פי מבחן זה.

### **<u>סעיף א</u>**

$$a_n=\frac{n^n}{n!3^n},a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!3^{n+1}}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^n}{n!3^n}\cdot\frac{(n+1)!3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n^n\cdot(n+1)\cdot n!\cdot 3^n\cdot 3}{n!\cdot 3^n\cdot(n+1)\cdot(n+1)^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot 3\xrightarrow{n\to\infty}\frac{3}{e}>1$$

ועל פי מבחן דלאמבר הטור מתבדר.

**<u>סעיף ב</u>**

מסעיף א נקבל ש $\frac{a_{n+1}}{a_n}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{e}{3}<1$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$ מתכנס.

# בהצלחה!!!