

תרגיל בית 3 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1 (חימום). תהי K/F הרחבת שדות ממימד ראשוני. יהי $F \subseteq L \subseteq K$ שדה ביניים. הוכיחו $L = F$ או $L = K$.

שאלה 2. תהי K/F הרחבת שדות. הוכיחו (למשל באינדוקציה) שלכל $a_1, \dots, a_n \in K$ מתקיים

$$[F[a_1, \dots, a_n] : F] \leq \prod_{i=1}^n [F[a_i] : F]$$

שאלה 3. הוכיחו כי $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$.

שאלה 4. מצאו את הפולינום המינימלי של האיברים הבאים מעל השדה המצויין:

א. $\sqrt[3]{5}$ מעל \mathbb{Q} .

ב. $\sqrt{2}$ מעל $\mathbb{Q}[i]$.

ג. $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ מעל \mathbb{Q} .

ד. $i + \sqrt{2}$ מעל \mathbb{Q} .

שאלה 5. תהי K/F הרחבת שדות, ויהי $\alpha \in K$ עם פולינום מינימלי

$$m_\alpha(x) = x^n - c \in F[x]$$

עבור $k \in \mathbb{N}$ מצאו את $m_{\alpha^k}(x)$, הפולינום המינימלי של α^k . הדרכה:

א. הניחו $k|n$ ומצאו פולינום שמתאפס ב- α^k .

ב. למקרה הכללי סמנו $d = (n, k)$ ומצאו קודם את $m_{\alpha^d}(x)$.

בהצלחה!