תורת גלואה – תרגיל 7

1. השלימו את התאמת גלואה עבור שדה הפיצול של $x^{6}+3$ שהתחלנו בכיתה. כתבו את התאמת גלואה עבור הפולינום $x^{5}-7$ (שגם את חבורת גלואה שלו חישבנו באחד השיעורים האחרונים).
לכל אחד מהפולינומים, כתבו את שריג תתי-השדות ושריג תתי-החבורות וזהו בין כל תת-שדה ביניים לתת-חבורה. זהו מי הן ההרחבות הנורמליות (והבחינו שהן מתאימות לתתי-חבורות נורמליות).
2. יהיו $f\left(x\right),g\left(x\right)\in F\left[x\right]$ פולינומים ספרביליים אי-פריקים מתוקנים השונים זה מזה. נניח כי חיתוך שדות הפיצול שלהם טריוויאלי: $F\_{f}∩F\_{g}=F$. הוכיחו כי חבורות גלואה של שדות הפיצול מקיימות:

 $G\_{fg}≅G\_{f}×G\_{g}$. תנו דוגמה שבה הדבר אינו מתקיים, כאשר מסירים את ההנחה על חיתוך שדות הפיצול (אך יתר ההנחות נשמרות).

1. הוכיחו כי $C\left(x\right)/C\left(x^{k}+x^{-k}\right)$ היא הרחבת גלואה ותארו את חבורת גלואה שלה.
2. נניח $p≡3\_{\left(mod 4\right)}$ ראשוני. הוכיחו כי $Q\left(\sqrt{-p}\right)⊆Q\left(ρ\_{p}\right)$.

הדרכה:

1. הראו כי $-1$ איננו ריבוע מודולו $p$.
2. הגדירו $τ=\sum\_{k\in Z\_{p}}^{}ρ\_{p}^{k^{2}}$ בדומה למהלך מהתרגול. חשבו את $τ\overbar{τ}$; הראו כי $Re\left(τ\right)=\frac{1}{2}\left(τ+\overbar{τ}\right)=0$ (רמז: סכום שורשי היחידה מסדר כלשהו הוא 0; היעזרו בסעיף א').
3. נתונה הרחבת גלואה $L/F$ מממד 225. יהי $K$ תת-שדה ביניים של ההרחבה מממד 25. ידוע כי $K/E$ גלואה לאיזה $F⊆E⊂K$ תת-שדה ביניים אמתי (המוכל ממש ב-$K$). הראו כי $K/F$ גלואה.