חשבון אינפי 1
תרגיל 3-פתרון

1. השתמשו בהגדרת הגבול על מנת להוכיח :

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-7}{n+2}\neq\frac{1}{3}$

הוכחה:

צריך למצוא $\varepsilon>0$, כך שלכל $n_0\in\mathbb{N}$ קיים $n>n_0$ כך ש- $\left|\frac{5n-7}{n+2}-\frac{1}{3}\right|>\varepsilon$.

אי השיוויון האחרון מתקיים , אם ורק אם , $\left|\frac{15n-21-n-2}{3(n+2)}\right|>\varepsilon$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{14n-23}{3(n+2)}\right|>\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\frac{14n-23}{3(n+2)}>\varepsilon\quad\forall n\geq 2$$

$$\Leftrightarrow 14n-23>3\varepsilon(n+2)$$

$$\Leftrightarrow n(14-3\varepsilon)>6\varepsilon+23$$

נקח $0<\varepsilon<\frac{14}{3}$, במקרה זה צריך להתקיים $n>\frac{6\varepsilon+23}{14-3\varepsilon}$.

ואז לכל $n_0\in\mathbb{N}$ נוכל לבחור $n>n_0+\frac{6\varepsilon+23}{14-3\varepsilon}>n_0$.

לסיכום :

קיבלנו שלכל $0<\varepsilon<\frac{14}{3}$ ולכל $n_0\in\mathbb{N}$ קיים $n>n_0+\frac{6\varepsilon+23}{14-3\varepsilon}>n_0$ כך ש- $\left|\frac{5n-7}{n+2}-\frac{1}{3}\right|>\varepsilon$

$\Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-7}{n+2}\neq\frac{1}{3}$.

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-7}{n+2}=5$

יהי $\varepsilon>0$, צריך למצוא $n_0\in\mathbb{N}$, כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $\left|\frac{5n-7}{n+2}-5\right|<\varepsilon$.

אי השיוויון האחרון מתקיים אם ורק אם , $\left|\frac{5n-7-5n-10}{n+2}\right|<\varepsilon$.

$$\Leftrightarrow\frac{17}{n+2}<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\varepsilon(n+2)>17$$

$$\Leftrightarrow n>\frac{17-2\varepsilon}{\varepsilon}$$

נקח $n_0=\left[\frac{17-2\varepsilon}{\varepsilon}\right]$, ואז לכל $n>n_0$ מתקיים $\left|\frac{5n-7}{n+2}-5\right|<\varepsilon$ כדרוש .

ג. יהי $\varepsilon=10^{-3}$. כמה מאיברי הסדרה $\left\{\frac{5n-7}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ נמצאים מחוץ לסביבה $\left(5-10^{-3},5+10^{-3}\right)$.

צריך למצוא n , כך ש- $\left|\frac{5n-7}{n+2}-5\right|\geq 10^{-3}$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{5n-7-5n-10}{n+2}\right|\geq 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{17}{n+2}\geq 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow n+2\leq 17000$$

$$\Leftrightarrow n\leq 16998$$

זאת אומרת 16998 מאיברי הסדרה $\left\{\frac{5n-7}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ נמצאים מחוץ לסביבה $\left(5-\varepsilon,5+\varepsilon\right)$

2. הוכיחו או הפריכו :

א. אם $\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|=l$, אזי הסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת .

הטענה לא נכונה .

דוגמא נגדית : $\left\{a_n\right\}_{\infty}=\left\{\left(-1\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

$\lim_{n\to\infty}\left|\left(-1\right)^n\right|=1$, אבל $\left\{\left(-1\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת .

ב. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=l$, אזי $\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|=\left|l\right|$.

הטענה נכונה

הוכחה:

יהי $\varepsilon>0$ צריך למצוא $n_0\in\mathbb{N}$, כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $\left|\left|a_n\right|-\left|l\right|\right|<\varepsilon$.

נתון : $\lim_{n\to\infty}a_n=l$ ולכן עבור $\varepsilon>0$ נתון קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $\left|a_n-l\right|<\varepsilon$,

לכל x,y מתקיים $\left|\left|x\right|-\left|y\right|\right|\leq\left|x-y\right|$ ולכן $\left|\left|a_n\right|-\left|l\right|\right|\leq\left|a_n-l\right|<\varepsilon$ כדרוש.

ג. אם $\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|=\lim_{n\to\infty}a_n=l$, אזי קיים $n_0\in\mathbb{N}$, כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $a_n>0$.

הטענה לא נכונה .

דוגמא נגדית :

$$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{\left(-1\right)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\ ,\ \lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|=\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

אבל לכל $n_0\in\mathbb{N}$ קיים $n>n_0$ כך ש- $a_n<0$. (לכל $n_0\in\mathbb{N}$ $a_{2n_0+1}<0$) .

3. השתמשו בהגדרת הגבול של סדרה על מנת להוכיח את הטענות הבאות :

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n+1}=\infty$

יהי $M>0$

$$\frac{n^2}{2n+1}>M$$
$$\Leftrightarrow n^2>2Mn+M$$
$$\Leftrightarrow n^2-2Mn-M>0$$
$$\Leftrightarrow n<M-\sqrt{M^2+M} \text{ או } n>M+\sqrt{M^2+M}$$

ולכן לכל $M>0$ קיים $n_0=\left[M+\sqrt{M^2+M}\right]$ כך ש- $\frac{n^2}{2n+1}>M \quad \forall n>n_0$

ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n+1}=\infty$.

הערה : ניתן להוכיח ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2}=0$ והיות ו- $\frac{n^2}{2n+1}>0 \ \forall n\in\mathbb{N}$ נקבל ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n+1}=\infty$

ב. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n^2+1}=0$

יהי $\varepsilon>0$ צריך למצוא $n_0\in\mathbb{N}$, כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $\left|\frac{n}{2n^2+1}\right|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{n}{2n^2+1}\right|<\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \frac{n}{2n^2+1}<\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow n<2\varepsilon n^2+\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow 2\varepsilon n^2-n+\varepsilon>0$$
$$2\varepsilon n^2-n+\varepsilon=0$$
$$n_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-8\varepsilon^2}}{4\varepsilon}$$

אם $1-8\varepsilon^2<0$ אז $2\varepsilon n^2-n+\varepsilon>0$ לכל $n\in\mathbb{N}$ והוכחנו את הדרוש .

אם $1-8\varepsilon^2>0$ אזי נקח $n_0=\left[\frac{1+\sqrt{1-8\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right]$ ואז לכל $n>n_0$ מתקיים $\left|\frac{n}{2n^2+1}\right|<\varepsilon$ כדרוש .

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{5-n^2}{n+1}=-\infty$

יהי $m<0$

$$\frac{5-n^2}{n+1}<m$$
$$\Leftrightarrow 5-n^2<nm+m$$
$$\Leftrightarrow -n^2-nm+5-m<0$$
$$-n^2-nm+5-m=0$$
$$n_{1,2}=\frac{m\pm\sqrt{m^2+4\left(5-m\right)}}{-2}$$

אם $m^2+4\left(5-m\right)<0$ אזי $\frac{5-n^2}{n+1}<m$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

אם $m^2+4\left(5-m\right)>0$ נקח $n>\left[\frac{m-\sqrt{m^2+4\left(5-m\right)}}{-2}\right]$ ואז $\frac{5-n^2}{n+1}<m$.

ולכן לכל $m<0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש- $\frac{5-n^2}{n+1}<m$ $\forall n>n_0$,

זאת אומרת $\lim_{n\to\infty}\frac{5-n^2}{n+1}=-\infty$

הערה :ניתן להוכיח ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5-n^2}=0$ והיות ו- $\frac{5-n^2}{n+1}<0$ $\forall n\geq 3$ נקבל ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{5-n^2}{n+1}=-\infty$