פתרון תרגיל בית 10 – אינפי' 1

שאלה 1

א. תהיי פונקציה ממשית f כך ש $f(x)=-f(-x)$ לכל $x\neq 0$. נתון ש f רציפה באפס. הוכיחו ש- $f(0)=0$.

הוכחה: נתון $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ נשתמש בהגדרת הגבול לפי היינה. נבנה שתי סדרות $0\neq x_n=\frac{1}{n}\to 0$, $0\neq y_n=-\frac{1}{n}\to 0$ אבל אז לפי היינה בשל הרציפות חייב להתקיים $f(0)=\lim f(x_n)=\lim f(y_n)$. ולכן

$$f(0)=\lim f(x_n)=\lim f\left(\frac{1}{n}\right)=\lim\left(-f\left(-\frac{1}{n}\right)\right)=\lim\left(-f\left(y_n\right)\right)=-\lim f\left(y_n\right)=-f(0)$$

ולכן $f(0)=-f(0)\Rightarrow f(0)=0$.

ב. תנו דוגמא לפונקציה כזו, וודאו שאכן היא מתאפסת באפס.

פתרון: $\sin(x)=-\sin(-x)$ והיא רציפה בכל הממשיים. אכן $\sin(0)=0$

שאלה 2

נניח ו $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, ונניח ש g רציפה ב a. הוכח $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=g(a)$ (רמז: האפסילון בהגדרת הגבול לפי קושי של הגבול של f הופך להיות הדלתא של הגדרת הגבול לפי קושי של $g(f(x))$).

הוכחה:

יהי $\varepsilon>0$.

נתון ש g רציפה ב a, לכן $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$ ולכן קיים $\delta>0$ כך ש:

(*) לכל $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $|g(x)-g(a)|<\varepsilon$.

נתון $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ ולכן לכל $\varepsilon_1>0$, ובפרט עבור $\varepsilon_1=\delta$ קיים $\alpha>0$ כך שאם $0<|x-x_0|<\alpha$ אזי $|f(x)-a|<\delta$.

ובגלל ש- $f\left(x\right)$ מקיים את תנאי (*) אז נקבל: $\left|g(f(x))-g(a)\right|<\varepsilon$ (במקרה $f(x)=a$ אזי $g(f(x))-g(a)=g(a)-g(a)=0<\varepsilon$). ולסיכום $\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g(a)$.

שאלה 3

מיינו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות: (רמז בדף הבא)

a. $\sin(\ln x^2)$

פתרון: ההרכבה אינה רציפה כאשר $\ln x^2$ אינה מוגדרת, כלומר כאשר $x=0$. נראה שהגבול החד צדדי $\lim_{x\to 0^+}\sin\left(\ln x^2\right)$ לא קיים ולכן זו נקודת אי רציפות מהמין השני. נוכיח זאת לפי היינה. נבנה 2 סדרות חיוביות ששואפות לאפס, אבל הגבולות של הפונקציה על הסדרות האלה שונים. $x_k=\sqrt{e^{\frac{\pi}{2}-2\pi k}}, y_k=\sqrt{e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}}$ קל לראות שסדרות אלה שואפות לאפס אבל שונות מאפס (שכן e בחזקת משהו ששואף למינוס אינסוף שואף לאפס). אבל $\sin\left(\ln\left(x_k^{\,2}\right)\right)=\sin\left(\ln\left(\sqrt{e^{\frac{\pi}{2}-2\pi k}}\right)^2\right)=\sin\left(\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}-2\pi k}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)=1$ בצורה דומה $\sin\left(\ln\left(y_k^{\,2}\right)\right)=-1$ ולכן הגבול החד צדדי אינו קיים.

b. $\sin(\frac{1}{\ln x^2})$

פתרון: נקודות האי רציפות נובעות מאיפוס המכנה ומנקודת אי ההגדרה של ה $\ln$. לכן נקודות אי הרציפות הינן $-1,0,1$.

עבור $x=0$, $\lim_{x\to 0}\ln x^2=-\infty$ ולכן $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln x^2}=0$ ומכיוון ש $\sin$ רציפה באפס ההרכבה שואפת לאפס, כלומר $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{\ln x^2})=0$ ולכן זו אי רציפות סליקה.

עבור $x=1$, נראה שהגבול החד צדדי $\lim_{x\to 1^+}\sin(\frac{1}{\ln x^2})=0$ אינו קיים ולכן זו אי רציפות מהמין השני. ניקח את הסדרות $x_k=\sqrt{e^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}}}, y_k=\sqrt{e^{\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}}}$ קל לראות שסדרות אלה שואפות

לאחר מכיוון ש $e^0=1$, וגדולות ממש מאחד. $\sin\left(\frac{1}{\ln {x_k}^2}\right)=1$, $\sin\left(\frac{1}{\ln {y_k}^2}\right)=-1$ ולכן הגבול החד צדדי לא קיים.

עבור $x=-1$, זו נקודת אי רציפות מהמין השני עם הוכחה דומה.

c. $\frac{5x+4}{|5x+4|}$

פתרון: נקודת אי הרציפות היא כאשר המכנה שווה אפס, בנקודה $x=-\frac{4}{5}$. נשים לב שהפונקציה שווה בדיוק לאחד כאשר $x>-\frac{4}{5}$, מינוס אחד כאשר $x<-\frac{4}{5}$ ולא מוגדרת כאשר $x=-\frac{4}{5}$. לכן הגבול הימני $\lim_{x\to\left(-\frac{4}{5}\right)^+}\frac{5x+4}{|5x+4|}=1$, הגבול השמאלי $\lim_{x\to\left(-\frac{4}{5}\right)^-}\frac{5x+4}{|5x+4|}=-1$.
שני הגבולות החד צדדים קיימים וסופיים ושונים ולכן זו נקודת אי רציפות מהמין הראשון.

d. $e^{-\frac{1}{\sin x}}$

פתרון: נקודות אי הרציפות הן הנקודות בהן המכנה מתאפס, כלומר $x_k=\pi k$. בכל נקודה כזו, מצד אחד הסינוס חיובי ומהצד השני שלילי ולכן $\frac{1}{\sin x}$ שואף למינוס אינסוף מצד אחד ואינסוף מהצד השני. ולכן $e^{-\frac{1}{\sin x}}$ שואף לאפס מצד אחד, ולאינסוף מהצד השני. ולכן כל נקודות אי הרציפות הינן מהמין השני.

e. $e^{-\frac{1}{(\sin x)^2}}$

פתרון: נקודות אי הרציפות הן כמו בסעיף הקודם $x_k=\pi k$. $(\sin x)^2$ תמיד חיובי, ולכן $-\frac{1}{(\sin x)^2}$ שואף למינוס אינסוף ולכן $e^{-\frac{1}{(\sin x)^2}}$ שואף לאפס. ולכן כל נקודות אי הרציפות הינן סליקות.

רמז לסעיפים קודמים: על מנת להוכיח שאין לפונקציה f גבול בנקודה a מספיק למצוא שתי סדרות $a\neq x_n,y_n\to a$ כך שאחד הגבולות $\lim_{n\to\infty}f(x_n),\lim_{n\to\infty}f(y_n)$ אינו קיים או שהגבולות הנ"ל שונים.

<u>דוגמא</u>: הוכח שלפונקציה הבאה אין גבול בנקודה 0: $f(x)=\cos\left(\sqrt{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)}\right)$

פתרון: יש למצוא שתי סדרות $0\neq x_n, y_n \to 0$ כמו שמצויין למעלה. יהיה הכי קל למצוא סדרות כך ש $f(x_n), f(y_n)$ קבועים שונים ללא תלות ב n.

למשל נרצה ש $f(x_n)=1, f(y_n)=-1$

אנו יודעים ש $\cos(2\pi n)=1, \cos(\pi+2\pi n)=-1$.

לכן אנחנו רוצים $\sqrt{\ln\left(\frac{1}{|x_n|}\right)}=2\pi n$

לכן רוצים $\ln\left(\frac{1}{|x_n|}\right)=(2\pi n)^2$

לכן $\frac{1}{|x_n|}=e^{(2\pi n)^2}$

ולבסוף $x_n=\frac{1}{e^{(2\pi n)^2}}$. קל לוודא ש $0\neq x_n\to 0$

באופן דומה $y_n=\frac{1}{e^{(\pi+2\pi n)^2}}$ ו $0\neq y_n\to 0$

ולכן לפי הבנייה,
$$f(x_n)=1\to 1$$
$$f(y_n)=-1\to -1$$

ולכן לפי היינה אין גבול בנקודה.

<u>שאלה 4</u>

תהי פונקציה f רציפה בקטע הפתוח (a,b), כך שלכל $x\in(a,b)$ $f(x)\in\mathbb{Q}$ (כלומר הפונקציה מקבלת ערכים רציונאליים בלבד בקטע). הוכח/הפרך: f פונקציה קבועה.

הוכחה: נניח בשלילה ש f אינה קבועה, לכן קיימים $x,y\in(a,b)$ כך ש $f(x)\neq f(y)$. f רציפה בקטע הסגור $[x,y]\subseteq(a,b)$ ולכן לפי משפט ערך הביניים מקבלת כל ערך בין $f(x), f(y)$. אבל לפי ארכימדס יש מספרים אי רציונליים בין כל שני רציונאליים ולכן קיים $c\in[x,y]$ כך ש $f(c)\notin\mathbb{Q}$ בסתירה.

שאלה 5

[שאלה ממבחן של פרופ' זלצמן] זהו וסווגו את נקודות אי הרציפות של הפונקציה: $\frac{1}{\log|x|}$

פתרון: זוהי מנה של פונקציות רציפות פרט לנקודה אפס בה הלוגריתם אינו מוגדר, לכן החלוקה רציפה כאשר $|x| \neq 0$ וכאשר המכנה $\log|x| \neq 0$ כלומר $x \neq \pm 1$. נבדוק את סוגי אי הרציפות בנקודות אלו:

$x=0$: $\lim_{x\to 0}\log|x| = -\infty$ לכן $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\log|x|}=0$ כלומר הגבול קיים וסופי ולכן זו נקודת אי רציפות סליקה.

$x=1$: עבור $\lim_{x\to 1}\log|x|=0$ וגם עבור $x>1$ מתקיים $\log|x|>0$ לכן $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\log|x|}=\infty$ כלומר זו נקודת אי רציפות ממין שני.

$x=-1$: עבור $x>-1$ מתקיים $\log|x|<0$ לכן $\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{\log|x|}=-\infty$ כלומר זו נקודת אי רציפות ממין שני.

שאלה 6

תהיינה f,g פונקציות רציפות בקטע $[0,1]$ המקיימות $g([0,1])=[0,1]$ ו- $f([0,1])\subseteq[0,1]$. הוכיחו שקיימת נקודה $x_0\in[0,1]$ שעבורה $f(x_0)=g(x_0)$.

פתרון: נתבונן בפונקציה $h(x)=f(x)-g(x)$. h רציפה ב $[0,1]$ כהפרש רציפות.

$g([0,1])=[0,1]$. לכן קיימות $x_1,x_2\in[0,1]$ שונות כך ש $g(x_1)=0,\ g(x_2)=1$.

מצד שני $f([0,1])\subseteq[0,1]$ ולכן בהכרח $f(x_1)\geq 0,\ f(x_2)\leq 1$. מכאן,

$$h(x_1)=f(x_1)-g(x_1)=f(x_1)-0=f(x_1)\geq 0$$
$$h(x_2)=f(x_2)-g(x_2)=f(x_2)-1\leq 0$$

לכן $h(x_2)\leq 0\leq h(x_1)$. בה"כ $x_2>x_1$ (אחרת פשוט מתבוננים בקטע $[x_2,x_1]$)

h רציפה ב $\left[x_1,x_2\right]$ (שכן אפילו רציפה ב$\left[0,1\right]$) וכמו כן $h(x_1)\geq 0\geq h(x_2)$. לכן ממשפט ערך הביניים נקבל שקיימת נקודה $x_0\in\left[x_1,x_2\right]\subseteq\left[0,1\right]$ שעבורה $f\left(x_0\right)-g\left(x_0\right)=h(x_0)=0$. מכאן $f\left(x_0\right)=g\left(x_0\right)$.

<u>שאלה 7</u>

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה רציפה בקטע $\left[0,a\right]$, כך שמתקיים $f\left(a\right)=f\left(0\right)$. הוכיחו שקיים $x_0\in\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כך ש-$f\left(x_0\right)=f\left(x_0+\frac{a}{2}\right)$.

פתרון: נתבונן בפונקציה $h(x)=f\left(x\right)-f\left(x+\frac{a}{2}\right)$. f רציפה ב $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ וכמו כן $f\left(x+\frac{a}{2}\right)$ רציפה ב $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כהרכבת רציפות ($x+\frac{a}{2}$ רציפה ב $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ ו f רציפה ב $\left[\frac{a}{2},a\right]$) לכן בסה"כ h רציפה ב$\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כהפרש רציפות. בשל הנתון $f\left(a\right)=f\left(0\right)$ מתקיים

$$h(0)=f(0)-f(\frac{a}{2})$$

$$h(\frac{a}{2})=f(\frac{a}{2})-f(a)=f(\frac{a}{2})-f(0)$$

נשים לב ש $h(0)=-h(\frac{a}{2})$. אם $h(0)=-h(\frac{a}{2})=0$ סיימנו שכן עבור $x_0=0$ נקבל הדרוש. אחרת, בהכרח 0 בין $h(0)$ ל $h(\frac{a}{2})$ (כי הם שוני סימן) וממשפט ערך הביניים ביחס ל h ולקטע $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ נקבל שקיימת $x_0\in\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כך ש $h(x_0)=0$.

מכאן נסיק ש $f\left(x_0\right)=f\left(x_0+\frac{a}{2}\right)$.

שאלה 8

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0,\infty)$ כך שמתקיים $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$. הוכיחו כי f מקבלת או מינימום או מקסימום (ז"א, לפחות אחד מהם).

פתרון: ברור שאם $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ אז $f(x)$ לא מקבלת מקסימום גלובלי ב $[0,\infty)$ (למה?).

נוכיח שבתנאי השאלה f מקבלת מינימום. f רציפה ב $[0,\infty)$ לכן בפרט קיים $L\in\mathbb{R}$ כך ש $f(0)=L$. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ לכן קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים $f(x)>L$. f רציפה ב $[0,\infty)$ ולכן רציפה בפרט ב $[0,M]$ לכן ממשפט ויירשטראס מקבלת מינימום ב $[0,M]$ כלומר קיים $m\in\mathbb{R}$ ו $x_0\in[0,M]$ כך ש $f(x_0)=m\le f(x) \quad \forall x\in[0,M]$.

בפרט $f(0)=L\ge m$. אבל לכל $x>M$ מתקיים $f(x)>L$ לכן לכל $x>M$ מתקיים ש $f(x)>m$. נקבל בסה"כ שלכל $x\in[0,\infty)$ $f(x)\ge m=f(x_0)$.

לכן מינימום מתקבל ב x_0.

שאלה למחשבה

תנו דוגמא לפונקציה רציפה ב$(0,1]$ כך שאינה חסומה מלעיל ואינה חסומה מלרע ב-$(0,1]$.
הוכח שהיא אכן כזו.

תשובה: לשם כך, נבחר פונקציה ששואפת לאינסוף בתחום הנ"ל ונכפול אותה בפונקציה שמחליפה סימן אינסוף פעמים בתחום. $f(x)=\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ מקיימת את תנאי השאלה. ברור שהיא רציפה בתחום, נראה שאינה חסומה מלעיל ואינה חסומה מלרע. ניקח את שתי הסדרות $x_k=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}, y_k=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$. ולכן $f(x_k)=\frac{\pi}{2}+2\pi k, f(y_n)=-(-\frac{\pi}{2}+2\pi k)$
ולכן $f(x_k)\to\infty, f(y_k)\to-\infty$ ולכן הפונקציה אכן אינה חסומה מלעיל או מלרע.