

חקב"צ - הרצאה 5

1 בדצמבר 2011

המשך שיטת ביג M

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} &: x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 - M\bar{x}_5 \\ \text{s.t.} &: x_1 + x_3 = 4 \\ & x_2 + x_4 = 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

הסימפלקס:

איטרציה	בסיס	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	יחס
0	z	1	$-3M - 3$	$-2M - 5$	0	0	0	$-18M$	
	x_3	0	1	0	1	0	0	4	4
	x_4	0	0	1	0	1	0	6	∞
	x_5	0	3	2	0	0	1	18	6
1	z	1	0	$-2M - 5$	$3M + 3$	0	0	$-6M + 12$	
	x_1	0	1	0	1	0	0	4	∞
	x_4	0	0	1	0	1	0	6	6
	x_5	0	0	2	-3	0	1	6	3
2	z	1	0	0	$-\frac{9}{2}$	0	$M + \frac{5}{2}$	27	
	x_1	0	1	0	1	0	0	4	4
	x_4	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	3	2
	x_2	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	-2

(לא נמשיך את הדוגמה)
הפתרון האופטימלי לבעיה זו יהיה

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 6 \\ x_3 &= 2 \\ z &= 36 \end{aligned}$$

לסיכום, במקרה של אילוץ שוויון, נוסיף משתנה מלאכותי ונכניס אותו לפונק' המטרה עם קנס (M) עד שיתאפס, וכך ניפטר ממנו ונגיע בעזרתו לפתרון האופטימלי.

בבעיית מינימום הקנס יהיה תוספת חיובית גדולה:

$$\min z = 5x_1 - 2x_2 + M\bar{x}_5$$

(ובבעיית מקסימום כמו שראינו תהיה תוספת שלילית גדולה).
נניח שלבעיה זו היה נוסף אילוץ:

$$2x_1 - 4x_2 = 10$$

אז היינו מוסיפים משתנה מלאכותי נוסף:

$$2x_1 - 4x_2 + \bar{x}_6 = 10$$

כיוון שנוסף לנו משתנה מלאכותי נוסף, על כל משתנה מלאכותי אנו מכניסים אותו לפונק' הממטרה ומשלמים עליו קנס:

$$\max z = 3x_1 + 5x_2 - M\bar{x}_5 - M\bar{x}_6$$

מקרה בעייתי - אילוץ \geq

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} &: x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 18 \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

במקרה זה נשתמש במשתנה עודף ונהפוך לשוויונות:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ x_2 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 &= 18 \end{aligned}$$

בעייתי - הוספת משתנה עודף לא תעזור לנו מיידית כיוון שאם x_1, x_2 שניהם 0, אזי x_5 שלילי. לכן, נוסיף משתנה מלאכותי לאילוץ הזה:

$$3x_1 + 2x_2 - x_5 + \bar{x}_6 = 18$$

ועלינו כמובן לשנות את פונק' המטרה:

$$z = 3x_1 + 5x_2 - M\bar{x}_6$$

כיוון שצריך שבכל אילוץ יהיה משתנה בסיסי יחיד, נקבע שמשתי חוסר ומשתנים מלאכותיים הם משתני בסיס ומשתנה עודף יהיה משתנה לא בסיסי (ואז נוכל להשתמש בסימפלקס).

לסיכום

אם האילוץ \leq נוסיף משתנה חוסר.
אם האילוץ $=$ נוסיף משתנה מלאכותי.
אם האילוץ \geq נוסיף משתנה עודף ומשתנה מלאכותי.

דואליות

לבעיה שניסחנו עד כה נקרא בעיה פרימלית. לכל בעיה פרימלית ניתן לנסח בצורה מקבילה בעיה התיקרא בעיה דואלית. הבעיה הפרימלית מגיעה מהתחום האפשרי (עוברת על פתרונות תת-אופטימליים ומגיעה בסוף לפתרון אופטימלי) ואילו הבעיה הדואלית מגיעה מהתחום הלא אפשרי (כלומר עוברת על

פתרונות על-אופטימיים ומגיעה בסוף לפתרון אופטימלי).
 הצגת בעיה פרימלית הינה מהצורה:

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t} &: \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\ & i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

הגדרה

הבעיה הדואלית לפרימלית הנ"ל היא:

$$\begin{aligned} \min w &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.t} &: \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \\ & j = 1, \dots, n \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$

בבעיה הדואלית, מספר האילוצים הוא כמספר המשתנים בבעיה הפרימלית ולהפך.

דוגמה

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t} &: x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

הבעיה הדואלית לבעיה זו היא:

$$\begin{aligned} \min w &= 4y_1 + 6y_2 + 18y_3 \\ \text{s.t} &: y_1 + 3y_3 \geq 3 \\ & y_2 + 2y_3 \geq 5 \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$

כלומר בבעיה הדואלית, המקדמים בפונק' המטרה הם המשאבים (b_i) של האילוצים.
 אגף ימין של האילוצים יהיו המקדמים של פונק' המטרה.
 באילוץ הראשון המקדמים הם מקדמי x_1 באילוצים וכו'.

טענה

הבעיה הדואלית לבעיה הדואלית היא הפרימלית. הוכיחו בבית.

אם נפתור את שתי הבעיה, ערך פונק' המטרה יהיה זהה עבור הפתרון האופטימלי (נוכח בהמשך).
 נניח שיש לנו בעיה, עם 2 משתנים 201 אילוצים, הבעיה הדואלית תכלול שני אילוצים 201 משתנים.
 בבעיה הדואלית טבלת הסימפלקס תכלול $2 \cdot 22 = 44$ תאים בעוד שבבעיה הפרימלית הטבלה תכלול
 $20 \cdot 22 = 440$ תאים ולכן יהיה פשוט יותר לחשב את הבעיה הדואלית.
 המקרה היחיד בו נעדיף להשתמש בכל מקרה בבעיה הפרימלית הינו כשנפתור בצורה גרפית (וזה כשיש
 רק 2 משתנים).