

תרגיל 12

תרגיל 1

חשבו את הגבולות הבאים:

$$a_n = n^6 - 3n^5 - 3n^4 - n^2 + 2n + 1 \quad (\text{א})$$

$$a_n = \sqrt{5n^4 + n^2} - \sqrt{5n^4 - n^2 + n + 1} \quad (\text{ב})$$

$$a_n = \sqrt[3]{n^9 + n^6 - 3n + 3} - \sqrt[3]{n^9 - n^6 - 1} \quad (\text{ג})$$

תרגיל 2

חשבו את הגבולות הבאים בעזרת המשפטים או העזרת ההגדרה:

$$\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4} \quad (\text{א})$$

$$\frac{(\ln(n))^n}{(5n)^n} \quad (\text{ב})$$

$$\left(\frac{-1}{n}\right)^n \quad (\text{ג}) \quad (\text{אפשר לפתור את התרגיל הזה בכמה שיטות, נסו כאן את משפט הסנדוויץ})$$

$$\frac{5^n + 7^n}{5^n - 7^n} \quad (\text{ד})$$

$$(8^n - n^2) \quad (\text{ה})$$

$$\frac{n!+6}{(n+1)!+8} \quad (\text{ו})$$

$$\left(\frac{n}{n^2-2}\right)^{\frac{8n^4-3n^3-3n^2+2n}{7n^3+2n-2}} \quad (\text{ז})$$

$$\frac{4^{n-5}}{2^n} \quad (\text{ח})$$

תרגיל 3

$$0 < a \in \mathbb{R} \quad \text{כאשר } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (\text{א})$$

(ב) תנו דוגמא לסדרות הבאות:

(1) חסומה שלא מתכנסת

(2) סדרה מונוטונית שלא חסומה

(3) סדרה לא מונוטונית ולא חסומה

(4) סדרה יורדת וחסומה מלרע

(5) סדרה עולה וחסומה מלעיל

(ג) נתונות שתי סדרות a_n, b_n , הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(1) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

(2) אם $a_n + b_n$ היא סדרה מתכנסת אזי a_n ו- b_n הן סדרות מתכנסות.

תרגיל 4

תהי a_n סדרה ששואפת לאפס, b_n סדרה שאין לה גבול (לא סופי ולא אינסופי).

(א) תנו דוגמה ל- a_n, b_n עבורן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$

(ב) תנו דוגמה לסדרות a_n, b_n עבורן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 1$

(ג) תנו דוגמה לסדרות a_n, b_n עבורן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n$ לא קיים.

(ד) בתנאים של התרגיל, מה אפשר להגיד על הגבול של $a_n \cdot b_n$?

תרגיל 5

הוכיחו העזרת ההגדרה הממשית (כלומר במונחים של ϵ) ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{2n} = 2$

תרגיל 6

הוכיחו בעזרת בהגדרת הגבול של מספרים ממשיים (הגדרת ϵ, δ) את הטענות הבאות:

א. תהי פונקציה f המקיימת $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

הוכיחו כי לכל $c \in \mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{x \rightarrow a} c * f(x) = c * L$

ב. תהי פונקציה f המקיימת $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, ותהיו g המקיימת לכל x : $g(x) \geq f(x)$.

הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$