תרגיל תיאורטי מספר 1

1. הוכיחו שלכל מספר מרוכב $z \in \mathbb{C}$ מתקיים כי
   (א) $|Re(z)| \leq |z|$.
   (ב) $z = \bar{z}$ אמ"מ $z \in \mathbb{R}$.
   (ג) לכל n טבעי מתקיים כי $|z^n| = |z|^n$

2. חשבו את את הבאים:
   (א) $\left|(1+i)^{20}\right|$
   (ב) $(4+3i)^{-1}$

3. הוכיחו או הפריכו:
   (א) אם עבור מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מתקיים כי $n > m$ אז למערכת $Ax = 0$ יש ∞ פתרונות.
   (ב) אם עבור מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מתקיים כי $n < m$ אז למערכת $Ax = 0$ אין פתרון.
   (ג) אם עבור מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מתקיים כי למערכת $\left(A^tA\right)x = 0$ יש פתרון יחיד אזי גם למערכת $\left(AA^t\right)x = 0$ יש פתרון יחיד.
   (ד) קיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ עבורה יש פתרון למערכת $Ax = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ואין פתרון למערכת $Ax = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.
   (ה) קיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ עבורה יש פתרון למערכת $Ax = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ואין פתרון למערכת $Ax = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$.

4. חשבו את $A \cdot B$ במקרים הבאים. אם הכפל לא מוגדר, ציינו זאת.
   (א) $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$

(ב) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$

(ג) $A=\begin{pmatrix}3&-1&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$

(ד) $A=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}3&-1&-1\end{pmatrix}$

5. עבור $\alpha\in\mathbb{F},\ A\in\mathbb{F}^{m\times n},\ B\in\mathbb{F}^{n\times p}$ הוכיחו שמתקיים $\alpha(AB)=A(\alpha B)$

6. נגדיר מטריצה $A\in\mathbb{R}^{8\times 8}$ ע"י $A_{i,j}=i+j$. חשבו את הבאים:

(א) $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

(ב) $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

7. תהיינה $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&0\\0&2&4\end{pmatrix}$ ו $v=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},u=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},w=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ חשבו את

$$\left(\begin{array}{c|c}A&0\\\hline 0&B\end{array}\right)^2\left(\begin{array}{c|c}v&u\\\hline 0&w\end{array}\right)=\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&1&-1&0&0&0\\0&2&4&0&0&0\\0&0&0&2&1&-1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&2&4\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\-2&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

היעזרו בעובדה כי $Av=3v,Au=2u$.