המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

טופולוגיה – 88 - 222 05 – סמסטר ב' תשע"ח, 10.07.18 מבחן מועד א'

המרצה: מיכאל מגרל המתרגלים: תמר בר-און, אחיה בר-און

הנחיות:

- יש **לבחור 4 מתוך 5** שאלות. נא לסמן על דף ראשון פנימי מספר תרגיל **שלא בחרתם**.
- כל שאלה שווה 25 נקודות. שאלת הבונוס שווה 5 נקודות. הציון הסופי לא יעבור את 100.
- אין להשתמש בכל חומר עזר, טלפון נייד או מחשבון.
- משך הבחינה שלוש שעות. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.

שאלות ופתרונות:

1. א. נניח $C_1, C_2, \cdots, C_n$ כיסוי סגור של מרחב טופולוגי X ונתונות פונקציות רציפות $f_i : C_i \to Y, \mathrm{i} \in \{1, \cdots, \mathrm{n}\}$ שמזדהות על החיתוכים (כלומר $f_i(C_i \cap C_j) = f_j(C_i \cap C_j)$). הוכיחו שפונקציה טבעית $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to Y$ המוגדרת חד משמעית ע"י הפונקציות f_i היא רציפה.

   ב. נניח $f : X \to Y$ רציפה ו Y האוסדורפי. הוכיחו סגירות של הגרף $Gr(f)$ במרחב המכפלה $X \times Y$.

פתרון:

א. ראו תרגיל בית 5 שאלה 7.

ב. ראו קובץ תרגילים נוספים – שאלה 3.3.2.

2. א. תנו דוגמה של פונקציה רציפה ועל $f : X \to Y$ שהיא לא פונקצית מנה.

   ב. יהי X מרחב מנה של $\mathbb{R}$ המתקבל מזיהוי של כל הנקודות $x \in \mathbb{R}$ עם $1 \le |x|$.
   הוכיחו ש X הומאומורפי למרחב $Y = \{\mathrm{z} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathrm{z}\| = 5\}$.

פתרון:

א. ראו קובץ תרגילים נוספים – שאלה 4.1.1.

ב. ראו תרגיל בית 11 שאלה 5. שם מדובר במעגל יחידה. קחו בחשבון שיש הומיאומורפיזם טבעי (כפל בסקלר 5) בין שני המעגלים הנ"ל.

3.

א. הוכיחו את המשפט הבא: תמונה רציפה של מרחב ספרבילי גם ספרבילי.

ב. הוכיחו שלא קיים מרחב מטרי (X, d) קומפקטי ושיכון איזומטרי $\mathrm{f} : (\mathbb{R}, d_\Delta) \to (X, d)$ כאשר $\forall\ x \neq y \quad d_\Delta(x, y) = 1$.

פתרון:

א. ראו את המשפט בהרצאות.

ב. נניח בשלילה שכן קיים $\mathrm{f} : (\mathbb{R}, d_\Delta) \to (X, d)$ הנ"ל.

(X, d) קומפקטי. הוכחנו בהרצאה שאז $(X, \mathrm{top}(d))$ ספרבילי.

לכן גם בעל תכונת מנייה שנייה (כי במרחבים מטריזביליים תכונת מניה שנייה שקולה לספרביליות). אז גם תת מרחב טופולוגי שלו גם בעל תכונת מנייה שנייה. בין היתר זה נכון עבור $\mathrm{f}(\mathbb{R})$. מצד שני $\mathrm{f}(\mathbb{R})$ הומאומורפי למרחב $(\mathbb{R},\mathrm{top}(d_{\Delta}))$. אבל הוא לא ספרבילי. כמרחב דיסקרטי בעל העוצמה $|\mathbb{R}|=\mathrm{c}$.
סתירה !

4. נניח $\mathbb{R}_s$ קו Sorgenfrey (תזכורת: טופולוגיה שלו τ_s מוגדרת על $\mathbb{R}$ כך:
$\tau_s := \{\mathrm{A}\subseteq\mathbb{R} : \mathrm{x}\in\mathrm{A}\Rightarrow\exists\,\varepsilon>0 \quad [\mathrm{x},\mathrm{x}+\varepsilon)\subseteq\mathrm{A}\}$).

א. חשבו את השפה $\partial(A)$ של תת קבוצה $A=(2,4)\cup\mathbb{N}$ במרחב $\mathbb{R}_s$.

ב. הוכיחו ש $\mathbb{R}_s$ הוא בעל תכונת $T_{3.5}$ אבל לא מטריזבילי.

פתרון:

א.

$$cl(A)=cl((2,4)\cup\mathbb{N})=cl((2,4))\cup cl(\mathbb{N})=[2,4)\cup\mathbb{N}=A$$
$$\mathrm{int}(A)=\mathrm{int}((2,4)\cup\mathbb{N})=[2,4)$$

קחו בחשבון ש:
$$[2,4)\in \mathrm{N(x)}\ \ \forall\,\mathrm{x}\in[2,4),\quad [2,4)\subseteq A$$
$$[y,y+\varepsilon)\not\subset A\quad \forall\varepsilon>0\ \ \forall y\in A\setminus[2,4)$$

לכן $\partial(A)=\mathrm{cl(A)}\setminus\mathrm{int(A)}=\mathrm{A}\setminus[2,4)=((2,4)\cup\mathbb{N})\setminus[2,4)=\mathbb{N}\setminus\{2,3\}$

ב. $T_{3.5}$

קודם כל : $\tau_s\in T_1$ כי לכל $a<b$ מתקיים
$a\in[a,a+\varepsilon)\in\tau_s,\ \mathrm{b}\in[\mathrm{b},\mathrm{b}+1)\in\tau_s, [a,a+\varepsilon)\cap[\mathrm{b},\mathrm{b}+1)=\varnothing$ כך ש $\varepsilon<b-a$

(זה מוכיח $\tau_s\in T_2$).

נניח $B\subset\mathbb{R}$ קבוצה סגורה בטופולוגיה τ_s ו $a\notin B$.

נוכיח שיש הפרדה פונקציונלית של $a\notin B$.

$B^c\in N(a)$. לכן קיים $\varepsilon>0$ מספיק קטן כך ש $[a,a+\varepsilon)\subseteq \mathrm{B}^c$.

נגדיר פונקצית האינדיקטור של תת קבוצה $[a,a+\varepsilon)^c$. זאת אומרת:
$f:\mathbb{R}_s\to[0,1],\ f(x)=1\ \forall x\notin[a,a+\varepsilon),\ f(x)=0\ \forall x\in[a,a+\varepsilon)$.

אזי $f(a)=0,\quad f(x)=1\ \forall x\in B\subseteq[a,a+\varepsilon)^c$.

לכן f פונקציה מפרידה $a\notin B$. שימו לב ש f רציפה כי $[a,a+\varepsilon)^c$ קבוצה סגוחה ב $\mathbb{R}_s$.

הוכחנו $T_{3.5}$.

$\mathbb{R}_s$ לא מטריזבילי. אפשר להוכיח זאת (כמו בהרצאות) אם נציין ש $\mathbb{R}_s$ ספרבילי (בעצם $\mathbb{Q}$ צפוף ב $\mathbb{R}_s$)
ומצד שני $\mathbb{R}_s$ הוא לא בעל תכונת שנייה (כי כל בסיס שלו בעל העוצמה $c\le$). במרחבים מטריזביליים תכונת מנייה שניה וספרביליות תכונות שקולות.

5. א. הוכיחו את משפט $Tychonoff$: מכפלה טופולוגית $\prod_{i\in I} X_i$ קומפקטית אם ורק אם כל גורם X_i קומפקטי (מותר להשתמש בלמה של Alexander).
ב. תנו דוגמה של מרחב מטרי ספרבילי שיש בו 2 מרכיבי קשירות ו 3 מרכיבי קשירות מסילתיים.

פתרון:

א. ראו את המשפט בהרצאות.

ב. למשל $X := \{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x < 1\} \cup \{0\} \times [-1,1] \cup \{(2018, 2018)\}$
(כתת מרחב של $\mathbb{R}^2$).

<u>שאלת בונוס</u> (5 נקודות):
תנו דוגמה של מרחב מטריזבילי X כך ש X קשיר מסילתית אבל קיימת בו נקודה z וסביבה $U \in N(z)$ כך שלכל סביבה $V \in N(z)$ עם $V \subseteq U$ מתקיים: V לא קשיר.

פתרון:

ראו קובץ תרגילים נוספים – שאלה 2.16.2.