1. (א) האדם נע במעגל בקצב קבוע ולכן:

$$\boxed{\vec{g} = \frac{v^2}{R}\hat{r} = R\omega^2\hat{r}}$$

האדם מרגיש תאוצה כלפי חוץ, כי הנורמל ששומר אותו בתנועה מעגלית הוא כלפי פנים.

(ב) i. נפתור קודם בקור' קרטזיות. נניח כי ברגע הקפיצה ($t=0$) ראש האדם פונה בכיוון $\hat{y}'$ של המערכת המסתובבת. מרגע הניתוק מהדופן (ועד החזרה אליה) לא פועלים על האדם כוחות אמיתיים ולכן

$$\vec{a} = 0.$$

בנוסף לכך

$$\vec{\omega}\times\hat{x}' = \omega\hat{y}' \quad ; \quad \vec{\omega}\times\hat{y}' = -\omega\hat{x}'.$$

לכן המשוואה

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}' - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'),$$

תהפוך ל

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \ddot{x}' = 2\omega\dot{y}' + \omega^2 x' \\ \ddot{y}' = -2\omega\dot{x}' + \omega^2 y' \end{array}\right..}$$

ניתן לפתור גם בקור' פולריות (שימו לב, $r,\theta,\hat{r},\hat{\theta}$ נמדדים יחסית למערכת הגליל ולא יחסית למערכת צופה מבחוץ). אנו יודעים כי בקור' פולריות

$$\vec{v}' = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta},$$

ו-

$$\vec{a}' = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}.$$

כמו כן הקשר בין התאוצות בשתי המערכות ניתן ע"י

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}' - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'),$$

כאשר, שוב, $\vec{a}=0$ מרגע שמתנתקים מהדופן. בנוסף

$$\vec{\omega}\times\hat{r} = \omega\hat{\theta} \quad ; \quad \vec{\omega}\times\hat{\theta} = -\omega\hat{r}.$$

מכל הקשרים הללו ($\vec{a}'$ לפי קור' פולריות, ו- $\vec{a}'$ לפי מעבר בין מערכות)

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} = 0 - 2\omega\dot{r}\hat{\theta} + 2\omega r\dot{\theta}\hat{r} + \omega^2 r\hat{r}$$

כלומר

$$\boxed{\ddot{r} = r(\dot{\theta}^2 + 2\omega\dot{\theta} + \omega^2) = r(\omega + \dot{\theta})^2,}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -2\frac{\dot{r}}{r}(\omega + \dot{\theta}).}$$

ii. במערכת של צופה חיצוני, מכיוון שלא פועלים על האדם כוחות, האדם נע במסלול ישר:

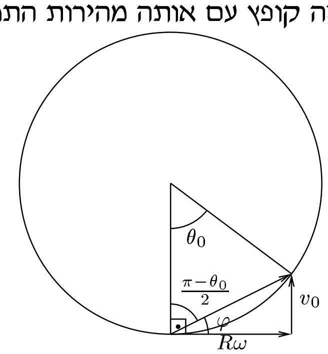
$$\boxed{\vec{a}=0},$$

כלומר במהירות

$$\boxed{\vec{v}=v_0\hat{y}+R\omega\hat{x}},$$

כאשר המהירות $R\omega$, נובעת מכך שברגע הקפיצה האדם נע בכיוון $\hat{x}$ יחד עם מעטפת הגליל. מהירות מעטפת הגליל היא $R\omega$.

(ג) הכי קל לפתור את השאלה במערכת של צופה חיצוני. לו הגליל לא היה מסתובב (אבל האדם היה קופץ עם אותה מהירות התחלתית $\vec{v}=R\omega\hat{x}+v_0\hat{y}$), אזי המסלול היה נראה:



כלומר

$$\theta_0=\frac{\pi-2(\frac{\pi}{2}-\varphi)}{2}=\varphi,$$

כאשר

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{v_0}{R\omega}.$$

מכאן, שהמרחק לאורך פני הגליל, לו הגליל לא הסתובב, היה $R\theta_0$. במשך הזמן הזה הגליל כן הסתובב, כך שהמרחק (לאורך פני הגליל) בעיני צופה מסתובב, הוא למעשה

$$\Delta x'=R\theta_0-R\omega t.$$

כעת, נותר למצוא את t. נמצא אותו מאורך המיתר והמהירות ההתחלתית. אורך המיתר הוא $2R\sin\frac{\theta_0}{2}$, ומהירות האדם היא $\sqrt{v_0^2+(R\omega)^2}$. לכן

$$t=\frac{2R\sin\frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{v_0^2+(R\omega)^2}},$$

כך שמקבלים לבסוף

$$\boxed{\Delta x'=R\theta_0-R\omega\frac{2R\sin\frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{v_0^2+(R\omega)^2}}},$$

כאשר

$$\theta_0=\tan^{-1}\frac{v_0}{R\omega}.$$

שאלה 2

א. נניח שהגוף נע במהירות v_x. במערכת המנוחה של הנוזל הוא נע במהירות v_x-u ולכן פועל עליו כח חיכוך $f=\beta(u-v_x)$. כח זה פועל על הגוף גם במערכת המעבדה ולכן:

$$\beta(u-v_x) = m\dot{v}_x$$

$$\Rightarrow \quad \dot{v}_x = -\frac{\beta}{m}V_x + \frac{\beta}{m}u$$

נשתמש בפתרון למשוואה דיפרנציאלית שניתן בבחינה עבור $w=-\frac{\beta}{m}$ $k=\frac{\beta}{m}u$ (אין צורך לעבור בעזרת הפרדת משתנים!)

$$V_x = A\,e^{-\frac{\beta}{m}t} + u$$

נציב תנאי התחלה:

$$V_x(t=0) = A+u = 0 \quad \Rightarrow \quad A=-u$$

$$\Rightarrow \quad v = u\left(1-e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)$$

ב. על הגוף פועל כח כובד כלפי מטה, כח עילוי כלפי מעלה וכח חיכוך בניגוד לכיוון המהירות של הגוף:

$$F = -mg + \rho V g - \beta V_y = m\dot{v}_y$$

$$\Rightarrow \quad \dot{v}_y = -\frac{\beta}{m}v_y + \frac{(\rho V-m)g}{m}$$

פתרון המשוואה:

$$v_y = A\,e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{(\rho V-m)g}{m}\cdot\frac{m}{\beta}$$

$$= A\,e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{(\rho V-m)g}{\beta}$$

מתנאי ההתחלה:

$$v_y(t=0) = A + \frac{(\rho V-m)g}{\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_y = \frac{(\rho V-m)g}{\beta}\left(1-e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)$$

ג.

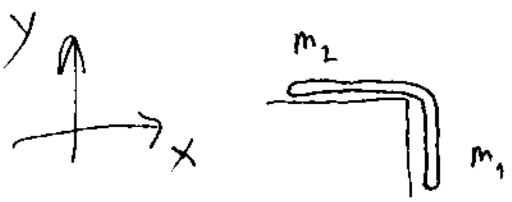
$$y = \int v_y \, dt$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{(\rho V - m) g t}{\beta} + \frac{(\rho V - m) g}{\beta} \cdot \frac{m}{\beta} e^{-\frac{\beta}{m}t} + C$$

$$y(t=0) = \frac{m(\rho V - m) g}{\beta^2} + C = 0$$ בתנאי ההתחלה:

$$\Rightarrow \quad y = \frac{(\rho V - m) g t}{\beta} + \frac{(\rho V - m) \cdot m g}{\beta^2} \left(e^{-\frac{\beta}{m}t} - 1 \right)$$

שאלה 3



א.

נסמן את מסתו של חלק החבל התלוי ב- m_1 ואת מסתו של חלק החבל המונח על השולחן ב- m_2.
נגדיר את צפיפות המסה באורך של החבל:

$$\lambda = \frac{M}{L}$$

ולכן מתקיים:

$$m_1 = \lambda l_0$$
$$m_2 = \lambda(L-l_0)$$

כאשר l_0 הינו אורך החבל התלוי.

l_0 מקסימלי כאשר כוח החיכוך מקסימלי ובכיוון מנוגד לכח הכובד.

הכוחות הפועלים על m_1:

$$y: \quad -m_1 g + T = 0$$
$$x: \quad F_x = 0$$ (אין כוחות).

הכוחות הפועלים על m_2:

$$x: \quad -f_2 + T = 0$$ (הסימן של f שלילי כי f צריך להתנגד לכח המושך את החבל!)

$$y: \quad -m_2 g + N_2 = 0$$

החיכוך הסטטי המקסימלי: $f_2 = \mu N_2 = \mu m_2 g$

מחיסור המשוואות:

$$\mu m_2 g - m_1 g = 0$$

מהצבת m_1 ו- m_2:

האורך המקסימלי:

$$\mu \lambda (L-l_0) = \lambda l_0$$
$$\Rightarrow l_0 = \frac{\mu L}{1+\mu}$$

ב. מכיוון שכעת השולחן נע בתאוצה יש כח נוסף שמושך את החבל כלפי מעלה.
לכן אורכו של חלק החבל התלוי יכול להיות גדול יותר מבסעיף א.

הכוחות הפועלים על m_1:

(מכיוון שיש תאוצה יש כח נורמלי): $X: N_1 - m_1 a = 0$

$Y: f_1 - m_1 g + T = 0$ אורך החבל מקסימלי כאשר החיכוך מקסימלי והכיוון קיומו של כח הכובד ולכן f_1 בכיוון כלפי מעלה.

החיכוך הסטטי המקסימלי: $f_1 = \mu N_1 = \mu m_1 a$

הכוחות הפועלים על m_2:

$X: T - m_2 a - f_2 = 0$ מכיוון שהמערכת מאיצה יש כח בכיוון.

$Y: -m_2 g + N_2 = 0$ על מנת ש- l_0 יהיה מקסימלי שוב נדרוש חיכוך מקסימלי והכיוון נגד כח המשיכה.

$f_2 = \mu N_2 = \mu m_2 g$

מחיבור המשוואות:

$$m_2 a + \mu m_2 g + \mu m_1 a - m_1 g = 0$$
$$\Rightarrow (L - l_0) a + \mu (L - l_0) g + \mu l_0 a - l_0 g = 0$$
$$\Rightarrow l_0 = \frac{L(a + \mu g)}{a(1-\mu) + g(1+\mu)}$$
האורך המקסימלי:

ג. מכיוון שהאורך קטן מהאורך שחישבנו בסעיף א קיימת אפשרות שהחבל יעלה כלפי מעלה (אין אפשרות שהוא יפול למטה מכיוון שהאורך קטן מהאורך אותו חישבנו בסעיף ב). על מנת שהחבל לא יעלה במעלה השולחן כוחות החיכוך צריכים להתנגד לכח המשיכה (כלומר ל- $m_2 a$).

הכוחות הפועלים על m_1:

$X: N_1 - m_1 a = 0$

$Y: T - m_1 g - f_1 = 0$

$f_1 = \mu N_1 = \mu m_1 a$

הכוחות הפועלים על m_2:

$X: T - m_2 a + f_2 = 0$ $\quad f_2 = \mu N_2 = \mu m_2 g$

$Y: -m_2 g + N_2 = 0$

מחיבור המשוואות:

$$m_2 a - \mu m_2 g - \mu m_1 a + m_1 g = 0$$

$$\Rightarrow \quad (L-l_0)a-\mu(L-l_0)g-\mu l_0 a+l_0 g=0$$

האורך המינימלי:

$$l_0=\frac{(a-\mu g)L}{a(1+\mu)+g(1-\mu)}$$

עבור l_0 קטן יותר החבל יעלה כלפי מעלה.