

תרגיל 11 בדידה להנדסה:

קצת ארוך, אבל עם הרבה עזרה והדרכה. שכל אחד ישנן לעצמו את מילותיו של המשורר

דנידין: "אני אתגבר".

1. נגדיר פונקציה $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ע"י $f((a, b)) = \frac{1}{2}((a+b)^2 - 3(a+b) + 2) + b$.

הוכיחו שהפונקציה f היא חח"ע ועל. הסיקו שמתקיים:

$$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$$

2. הוכיחו או הפריכו: אם $A \subseteq B$ אז $|A| \leq |B|$.

3. הוכיחו: $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$. הדרכה: הניחו בשלילה שקיימת פונקציה (חח"ע) $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$.

לכל איבר ב- $[0, 1]$ יש מקור. איברים ב- $[0, 1]$ הם מהצורה: $0.a_1a_2a_3\dots$

כאשר לכל i , $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, כלומר מספרים עשרוניים. מכיוון

שלכל איבר יש מקור, אפשר לכתוב:

$$f(1) = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots$$

$$f(2) = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots$$

ובאופן כללי:

$$f(n) = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots$$

בנו מספר חדש שאינו אף אחד מהמספרים $0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}\dots$ ($i \in \mathbb{N}$). הסבירו למה

קיום מספר כזה סותר את העבודה שהפונקציה f היא על. הסבירו למה אי-קיום

של פונקציה f על כזו גורר אי-קיום של פונקציה $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. למה זה מכריח

$|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$? חפשו "האלכסון של קנטור" בגוגל.

4. נזכור את הסימון: $B^A = \{f | f : A \rightarrow B\}$. נגדיר חזקה של עוצמות ע"י $|B|^{|A|}$

$|B^A|$. הראו שלכל קבוצה A מתקיים $|P(A)| = 2^{|A|}$. הדרכה: הגדירו לכל $B \in$

$P(A)$ את הפונקציה $\chi_B : A \rightarrow \{0, 1\}$ ע"י:

$$\chi_B(a) = \begin{cases} 1 & a \in B \\ 0 & a \notin B \end{cases}$$

הסבירו למה זו אכן פונקציה מהקבוצה A לקבוצה $\{0, 1\}$. כעת, הגדירו פונקציה $\psi : P(A) \rightarrow \{0, 1\}^A$ ע"י $\psi(B) = \chi_B$. הסבירו למה ψ היא אכן פונקציה והראו שהיא חח"ע ועל. הסיקו ש- $|P(A)| = |\{0, 1\}^A|$ והסבירו למה זה גורר את מה שיש להוכיח.

5. הראו שלכל $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $a < b, c < d$ מתקיים: $|(a, b)| = |(c, d)|$ וגם $|[a, b]| = |[c, d]|$, כלומר בנו פונקציות חח"ע ועל מתאימות והראו שהן אכן כאלה. הדרכה: פונקציה ששולחת קטע לקטע אחר היא קו ישר. קו ישר הוא פונקציה מהצורה $f(x) = mx + n$. יש למצוא m, n כך שהקו הישר $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ יקיים $f(a) = c, f(b) = d$. הסבירו למה זה יעבוד גם אם נתבונן בקבוצות $(a, b), (c, d)$.

6. הראו שמתקיים: $|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})| = |\mathbb{R}|$ וגם $|(0, 1)| = |\mathbb{R}|$. הדרכה: בנו פונקציה חח"ע ועל עבור אחד מהשיויונות והשתמשו בשאלה 5 ובשיויון שהוכחתם כדי להסביר למה גם השיויון השני נכון.

7. האם הפונקציות הבאות הפיכות? אם כן, מצאו את ההופכית:

(א) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^5 + 1$.

(ב) $f : \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ המוגדרת ע"י $f(x) = 2^x$.

(ג) $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = e^x$.

(ד) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = e^x$.

(ה) $f : \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ המוגדרת ע"י $f(x) = e^x$.