

מועד א' במשוואות דיפרנציאליות רגילות

משך הבחינה: שלוש שעות, חומר עזר מותר: מחשבון פשוט.

ענו על ארבע שאלות מתוך חמש. נמקו את צעדיכם!

שאלה 1:

מהירות הפירוק של חומר רדיואקטיבי פרופורציונלית לכמות החומר $r(t)$, $r'(t) = -kr(t)$.

ידוע שתוך 30 יום התפרקו 50% מהחומר. כמה זמן ייקח עד שיישאר 1% מכמות החומר ההתחלתית?

שאלה 2:

מצאו פתרון למשוואה $0 = ydx + (x + x^2y^4)dy$ המקיים $y(1) = \sqrt[4]{3}$.

רמז: מצאו גורם אינטגרציה מהצורה $\mu = x^\alpha y^\beta$.

שאלה 3:

האם $y_1(x) = \sin x$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה $0 = y^{(4)} - 2y^{(3)} + 3y'' - 2y' + 2y$?

מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה.

שאלה 4:

מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $y''' + 2y'' + 2y' = 4\sin^2 x$.

רמז: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

שאלה 5:

מצאו נוסחת נסיגה ורשמו חמישה איברים ראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור חזקות סביב $x_0 = 0$ של פתרון הבעיה:

$$\begin{cases} y''' - xy'' + y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0 \end{cases}$$

בהצלחה!

נוסחאות מד"ר

חלק א' – מד"ר מסדר ראשון:

כתיב דיפרנציאלי – את המד"ר $y' = f(x, y)$ נוכל לכתוב באופן שקול $dy = f(x, y)dx$

מד"ר פרידה – פתרון למד"ר מהצורה $f(x)dx = g(y)dy$ מקיים את המשוואה הסתומה $F(x) = G(y) + C$ כאשר $F(x) = \int f(x)dx$ וכן $G(y) = \int g(y)dy$.

מד"ר הומוגנית – מד"ר מהצורה $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ נציב $z = \frac{y}{x}$ ונקבל $\int \frac{1}{g(z)-z} dz = \ln|x| + C$. נמצא את z ונציב לקבל $y = xz$.

ניתן להציג את $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ אם ורק אם לכל $\lambda \neq 0$ מתקיים כי $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. במקרה זה $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

מד"ר לינארית מסדר ראשון – פתרון למד"ר $y' + a(x)y = b(x)$ נתון ע"י הנוסחא

$$y = e^{-A(x)} \left(C + \int b(x)e^{A(x)} dx \right)$$

כאשר $A(x) = \int a(x)dx$.

משוואת ברנולי – יהי $n \neq 0, 1$, מד"ר מהצורה $y' + a(x)y = b(x)y^n$.

נציב $z = y^{1-n}$ ונקבל את המד"ר $z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$.

נמצא את z ונחליף $y = z^{\left(\frac{1}{1-n}\right)}$.

מד"ר מדוייקת – מד"ר מהצורה $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

הפתרון של מד"ר מדוייקת מקיים את המשוואה הסתומה $F(x, y) = C$ כאשר $F_x = P, F_y = Q$.

שלבי הפתרון:

1. נבדוק אם היא מדוייקת – המד"ר מדוייקת אם ורק אם $P_y = Q_x$.
2. נמצא את F ע"י חישוב אינטגרל $F = \int Pdx + c(y)$.
3. נגזור ונשווה למקדם השני $Q = \frac{\partial}{\partial y} (\int Pdx + c(y))$, וכך נמצא את $c(y)$.
4. הפתרון נתון באופן סתום ע"י $F(x, y) = C$.

גורם אינטגרציה – מד"ר מהצורה $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, נחפש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ שכפל בו יהפוך את המד"ר למדוייקת.

שלבי התהליך:

1.

א. יש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ אם הביטוי $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ אינו תלוי ב- y ,

במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא $\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}$.

ב. יש גורם אינטגרציה $\mu(y)$ אם הביטוי $\frac{Q_x - P_y}{P}$ אינו תלוי ב- x ,

במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא $\mu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy}$.

2. נכפול בגורם האינטגרציה, ונוודא שקיבלנו מד"ר מדוייקת (לא חובה מתמטית, אבל מומלץ מאד).

3. נפתור את המד"ר המדוייקת שקיבלנו.

בעיית קושי למד"ר מסדר ראשון – מציאת פונקציה y המקיימת את המד"ר $y' = f(x, y)$ וכן את תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$.

המשוואה האינטגרלית – בעיית הקושי שקולה למשוואה האינטגרלית $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$.

משפט הקיום והיחידות – תהי $f(x, y)$ רציפה ובעלת נגזרת חלקית f_y רציפה בתחום $|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$.

נסמן ב- M את החסם של $|f(x, y)|$ בתחום, ונסמן $a' = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

אזי קיים פתרון יחיד y לבעיית הקושי $y' = f(x, y)$ עם תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$ בתחום $|x - x_0| \leq a'$.

חלק ב' – נוסחאות פיזיקליות בסיסיות:

משמעות הנגזרות –

1. $y(t)$ מיקום

2. $v(t) = y'(t)$ מהירות

3. $a(t) = y''(t)$ תאוצה

החוק השני של ניוטון – $F = ma$ כאשר F הוא סכום הכוחות, m היא המסה של הגוף, וכן a הוא התאוצה של הגוף

כוח המשיכה של כדור הארץ – עבור גוף "קרוב" לפני כדור הארץ נניח כי כוח המשיכה הוא mg כאשר m היא המסה של הגוף וכן g הוא קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ ($g \approx 9.82 \text{ m/sec}^2$).

כוח קפיץ – קפיץ בעל קבוע קפיץ k מפעיל כוח פרופורציונלי למרחק מנקודת הרפיון בכיוון ההפוך.

אם y הוא המיקום ביחס לנקודת הרפיון, אז הקפיץ יפעיל כוח של $-ky$.

חלק ג' – מד"ר מסדר גבוה:

הורדת סדר למד"ר מסדר שני ללא המשתנה – עבור מד"ר מהצורה $y'' = f(y, y')$

1. נחפש פונקציה $p(y)$ עבורה $p'p = f(y, p)$

2. נחפש פונקציה y המקיימת $y' = p(y)$.

מד"ר לינארית – מד"ר מהצורה $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ נקראת מד"ר לינארית מסדר n . אם $b(x) = 0$ המד"ר נקראת הומוגנית.

בעיית קושי למד"ר לינארית – מציאת פונקציה המקיימת את המד"ר הלינארית מסדר n ואת תנאי ההתחלה

$$y(x_0) = b_0, y'(x_0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$$

משפט קיום ויחידות – אם המקדמים $a_i(x), b(x)$ רציפים בקטע I אזי קיים פתרון יחיד בקטע I המקיים את בעיית הקושי.

מרחב הפתרונות – מרחב הפתרונות למד"ר הלינארית ההומוגנית מסדר n עם מקדמים רציפים הוא ממימד n .

פתרון כללי למד"ר לינארית – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים, יהיו $y_1, \dots, y_n$ בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית ויהי y_p פתרון פרטי למד"ר האי הומוגנית. אזי הפתרון הכללי למד"ר הוא

$$y = y_p + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

הורונסקיאן – עבור הפונקציות $y_1, \dots, y_n$ נגדיר את הורונסקיאן

$$W = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

תלות לינארית של פתרונות – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים בקטע I , ויהיו $y_1, \dots, y_n$ פתרונות למד"ר.

אזי הפתרונות ת"ל אם ורק אם הורונסקיאן מתאפס בכל הקטע I .

מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים – הפולינום האופייני של המד"ר $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$ הוא

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

אם $\lambda \in \mathbb{R}$ שורש ממשי של הפולינום האופייני מריבוי k , אזי הוא תורם את הפתרונות

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$$

למד"ר ההומוגנית.

אם $\lambda = a \pm bi \in \mathbb{C}$ זוג שורשים מרוכבים של הפולינום האופייני מריבוי k כל אחד, אזי הם תורמים את הפתרונות

$$e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx), x e^{ax} \cos(bx), x e^{ax} \sin(bx), \dots, x^{k-1} e^{ax} \cos(bx), x^{k-1} e^{ax} \sin(bx)$$

למד"ר ההומוגנית.

שיטת הניחוש עבור מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים – עבור המד"ר

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = (c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m)e^{ax}$$

כאשר a שורש של הפולינום האופייני מריבוי k ננחש פתרון פרטי

$$y_p = x^k(d_0 + d_1x + \dots + d_mx^m)e^{ax}$$

עבור המד"ר

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = (c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m)e^{ax} \cos(bx)$$

או המד"ר

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = (c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m)e^{ax} \sin(bx)$$

כאשר $a \pm bi$ שורשים של הפולינום האופייני מריבוי k כל אחד ננחש פתרון פרטי:

$$y_p = x^k(d_0 + d_1x + \dots + d_mx^m)e^{ax} \cos(bx) + x^k(t_0 + t_1x + \dots + t_mx^m)e^{ax} \sin(bx)$$

שיטת וריאצית המקדמים בעזרת כלל קרמר למציאת פתרון פרטי – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים בקטע I :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$$

ויהיו $y_1, \dots, y_n$ פתרונות המהווים בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית. אזי הפונקציה

$$y_p = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

מהווה פתרון פרטי למד"ר אם לכל i מתקיים כי

$$c'_i(x) = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

כאשר

$$A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

וכן A_i היא המטריצה המתקבלת מ- A ע"י החלפת העמודה i בעמודה $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

מערכת מד"ר – עבור מערכת מד"ר מהצורה $\vec{y}^{(n)} = A\vec{y}$, כאשר v_1 ו"ע עם ע"ע מתאים λ_1 של המטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

ננחש פתרון $\vec{y} = f \cdot v_1$, ונקבל כי הוא אכן פתרון אם $f^{(n)} = \lambda_1 f$.

משוואת אוילר – משוואת אוילר הומוגנית היא משוואה לינארית מהצורה

$$a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

על מנת למצוא את הפתרונות של משוואת אוילר הומוגנית נבצע את השלבים הבאים:

1. נציב $y = x^r$ במשוואה, נצמצם את x^r ונקבל את המשוואה האינדנציאלית.
2. אם $r \in \mathbb{R}$ שורש מריבוי k של המשוואה האינדנציאלית, נקבל את הפתרונות $x^r, \ln(x) x^r, \dots, (\ln(x))^{k-1} x^r$
3. אם $a \pm bi \in \mathbb{C}$ שורשים מריבוי k כל אחד של המשוואה האינדנציאלית נקבל את הפתרונות $x^a \cos(b \ln(x)), x^a \sin(b \ln(x)), \ln(x) x^a \cos(b \ln(x)), \ln(x) x^a \sin(b \ln(x)), \dots, (\ln(x))^{k-1} x^a \cos(b \ln(x)), (\ln(x))^{k-1} x^a \sin(b \ln(x))$

תגובה להלם עם קונבולוציה

תהי מד"ר $y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$ ותהי תגובה להלם $s(x)$ כלומר הפתרון למד"ר ההומוגנית המקיים $s(0) = 0$ וכן $s'(0) = 1$.

אזי פתרון פרטי למד"ר הלא הומוגנית הוא הקונבולוציה עם התגובה להלם

$$y(x) = f * s = \int_{x_0}^x f(u) s(x-u) du$$

חלק ד' – התמרת לפלס והדלתא של דירק:

$$\text{התמרת לפלס} - \mathcal{L}(y) = \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt$$

התמרות לפלס ידועות –

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-sa}$$

תכונות התמרת לפלס –

יחידות –

אם y_1, y_2 רציפות וכן $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2)$ אזי $y_1 = y_2$.

לינאריות –

$$\mathcal{L}(y_1 + ay_2) = \mathcal{L}(y_1) + a\mathcal{L}(y_2)$$

התמרת הנגזרת הראשונה –

$$\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0)$$

התמרת הנגזרת –

$$\mathcal{L}(y^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(y) - s^{n-1}y(0) - \dots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

נגזרת ההתמרה –

$$\mathcal{L}(ty) = -F'(s)$$

הזזה של המשתנה $-s$ אם $F(s) = \mathcal{L}(y)$ אזי

$$F(s - a) = \mathcal{L}(e^{at}y(t))$$

הזזה של המשתנה $-t$ אם $F(s) = \mathcal{L}(y)$ אזי

$$e^{-as}F(s) = \mathcal{L}(u(t - a)y(t - a))$$

כאשר $u(t)$ היא פונקציית המדרגה:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$