בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ"ו, מועד ב'

8.9.2026, כ"ו באלול התשפ"ו

מרצים: אחיה בר-און, דניס גולקו, שירה ידעי, ארז שיינר.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

<u>תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק.</u>

<u>ניתן לענות משני צידי הדף.</u>

בהצלחה!

1. (9 נקודות כל סעיף) תהיינה A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הבאים:

(א) אם $A \subseteq C \subseteq B$ אז $\mathcal{P}(A \triangle C) \cap \mathcal{P}(C \triangle B) = \{\emptyset\}$.

(ב) אם $A \neq B$ אז $(A \times B) \neq (B \times A)$.

(ג) אם $A \cap B \neq \emptyset$ אז $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset$.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

2. (7 נקודות כל סעיף) פונקציה $f : A \to B$ תקרא תת-חח"ע אם לכל $b \in B$ מתקיים שקבוצות המקורות של b, $f^{-1}[\{b\}]$ בעלת שני איברים לכל היותר (כלומר $\left|f^{-1}[\{b\}]\right| \leq 2$).

תהיינה $f : A \to B$ ו $g : B \to C$ פונקציות. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם f, g שתיהן תת-חח"ע אז ההרכבה $g \circ f$ היא תת-חח"ע.

(ב) אם $g \circ f$ היא תת-חח"ע אז f היא תת-חח"ע.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

3. (7 נקודות כל סעיף) תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נגדיר יחס S על $\mathbb{R}$ כך:

$$x_1Sx_2 \iff |\{t\in\mathbb{R}\mid f(x_1)=f(t)\}|=|\{t\in\mathbb{R}\mid f(x_2)=f(t)\}|$$

(א) הוכיחו כי S יחס שקילות על $\mathbb{R}$.

(ב) נניח כי f מוגדרת על ידי $f(x)=x^2$. מצאו את עוצמת קבוצת המנה, $\mathbb{R}/S$. קבעו האם העוצמה סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת.

(ג) הוכיחו/הפריכו: אם f הפיכה אז $S=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

(ד) הוכיחו/הפריכו: אם $S=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ אז f הפיכה.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

4. תהא $\mathbb{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ קבוצה של תתי קבוצות של הטבעיים המקיימת כי היא שרשרת ביחס להכלה (היינו לכל A, B ב $\mathbb{X}$ מתקיים $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$). נגדיר יחס R על $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ על ידי הכלל

$$ARB \iff (\exists S \in \mathbb{X} : A \subseteq S \wedge B \subseteq \mathbb{N} \backslash S) \vee (A = B)$$

(א) (6 נקודות) הוכיחו כי R יחס סדר על $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$.

(ב) (6 נקודות כל סעיף) נניח $\mathbb{X} = \{\{m \in \mathbb{N} \mid \exists k \leq n : m = 2k\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

i. הוכיחו/הפריכו: קיים sup לקבוצה $\{\{2n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ii. נסמן ב- $\mathbb{M}$ את קבוצת חסמי המלרע (החסמים מלמטה) של הקבוצה $\{\{3\}, \{3, 5\}\}$. מצאו את העוצמה של $\mathbb{M}$. קבעו האם העוצמה $|\mathbb{M}|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

5. תהא A קבוצה. יחס S על A יקרא אנטי-טרנזיטיבי אם

$$\forall a,b,c \in A : [aSb \wedge bSc] \Rightarrow \neg(aSc)$$

נסמן ב $\mathbb{K}$ את קבוצת כל היחסים על A שהם אנטי-טרנזיטיביים. נתבונן ב $\mathbb{K}$ עם יחס ההכלה.

(א) (5 נקודות) הוכיחו: לכל $S \in \mathbb{K}$ מתקיים $S \cap I = \emptyset$. כאשר I הוא יחס הזהות על A.

(ב) (5 נקודות) הוכיחו שקיים יחס $S \in \mathbb{K}$ שהוא מקסימאלי.

(ג) (5 נקודות לכל תת-סעיף) נניח כעת ש $A = \mathbb{R}$.

i. יהא יחס $S \in \mathbb{K}$ מקסימאלי. הוכיחו: $|S| = \aleph$.

ii. מצאו את עוצמת $\mathbb{K}$. קבעו האם העוצמה $|\mathbb{K}|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___