1

משפט סנדוויץ' לחישוב גבולות:

יהיו $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ שלוש פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של הנקודה $x=a$ (פרט אולי לנקודה a עצמה)

ונניח כי לכל x בסביבה זו מתקיים

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

ונניח כי קיימים הגבולות $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \in \mathbb{R}$

אזי $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

תרגיל: חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin(1/x)}$$

פתרון: מתקיים $1 = 2-1 \leq 2+\sin(1/x) \leq 2+1 = 3$

ולכן $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2+\sin(1/x)} \leq 1$

עבור $x>0$ מתקיים

$$x \geq \frac{x}{2+\sin(1/x)} \geq \frac{x}{3}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

עבור $x<0$ מתקיים $x \leq \frac{x}{2+\sin(1/x)} \leq \frac{x}{3}$

ולכן קיבלנו $\lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin(1/x)} = 0$

כלל:

1) אם $f(x)>0$ אזי

(x_0 סופי או ∞) $$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln(f(x))} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln(f(x))}$$

2) אם $\lim_{x\to x_0} h(x) = \infty$

ש

$$\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{a}{h(x)}\right)^{h(x)} = e^{a}$$

דוגמאות:

1. חשבו את

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$$

פתרון: לפי חלק 1 של הכלל הדוגמא:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)}$$

נחשב את:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\frac{\cancel{1-x}}{\cancel{(1-x)}(1+\sqrt{x})}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\ln\Big(\underbrace{\frac{1+x}{2+x}}_{\to 1}\Big)}_{\to 0}\right) = 0$$

ומכאן נוכל:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=e^{0}=1$$

הערה: המעבר האחרון נכון מהסיבה הבאה:
אם f רציפה ב-$x=a$ ואכן זוהי e
ו- $\lim_{x\to x_0} g(x)=a$ אזי

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=f(\lim_{x\to x_0} g(x))=f(a)$$

(2.

$$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1-3x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{-3\ln(1-3x)}{-3x}}=e^{-3}$$

תרגיל: חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$$

פתרון: נרצה לחלק את המונה והמכנה ב-x
אך יש לשמור כאן בזהירות.
נשים לב: $\sqrt{x^2}=|x|$ וכאשר x שלילי
אז ה"כ $\sqrt{x^2}=-x$, ולכן:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2}=-\frac{1}{2}$$

הגדרה: (גבולות חד צדדיים)

לפעמים נרצה להגדיר גבול רק מצד אחד, שכן, ישנן פונקציות שאינן מוגדרות עבור $x<0$, למשל $\sqrt{x}$. לכן יש טעם להגדיר במקרה כ- גבול רק מימין או משמאל.

הגדרה (לפי קושי)

$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ ק"מ $\delta>0$ כך שאם $0<x-x_0<\delta$ אזי $|f(x)-L|<\varepsilon$.

$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ ק"מ $\delta>0$ כך שאם $0<x_0-x<\delta$ אזי $|f(x)-L|<\varepsilon$.

הגדרה (לפי היינה)

תהי $\{x_n\}$ סדרה המקיימת $x_n\to x_0$ ולכל $n\in\mathbb{N}$: $x_n>x_0$ אם לכל סדרה כזאת מתקיים $f(x_n)\to L$ אזי $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$

(באותו אופן מגדירים גבול משמאל).

משפט: תהי f פונקציה. הגבול הדו - צדדי של f בנקודה $x_0\in\mathbb{R}$ ק"מ $\iff$ הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים זה לזה.

כלומר:
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \iff$$
$$L\in\mathbb{R}\,,\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=L \iff$$

תרגיל: חקרו את הגבולות החד צדדיים ב $x=3$ של

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-9}}{|3-x|}$$

פתרון: הגבול לא קיים כי הפונקציה לא מוגדרת בסביבה השמאלית של $x=3$ (היא לא מוגדרת עבור $|x|<3$)

נחשב את הגבול מימין:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{|3-x|}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}=$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{(x-3)(x+3)}}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}=\infty$$

תרגיל: עבור אילו ערכי $a\in\mathbb{R}$ קיים הגבול של $f(x)$ בנקודה $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(3x)}{x} & x>0\\[2ex] \dfrac{x+5}{2x+a} & x<0\end{cases}$$

פתרון: נחשב

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+5}{2x+a}=\frac{5}{a}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(3x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\sin(3x)}{3x}=3$$

לכן צריך $3=\frac{5}{a}$ ומכאן נקבל

$$a=\frac{5}{3}$$

הגדרה (רציפות בנקודה)

נאמר ש-פונקצי' f רציפה בנקודה x_0 אם מתקיימים שני תנאים:

1. f מוגדרת ב-x_0 (כלומר x_0 נמצאת בתחום הגדרה של f).
2. ל-f יש גבול ב-x_0 וכן מתקיים $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

הערה: כל הפונקציות האלמנטריות הן רציפות בכל תחום הגדרתן.

דוגמאות:

1. $f(x)=\frac{|x-5|}{x-5}$ אינה רציפה ב $x=5$ משום שאינה מוגדרת שם

2. $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-2}}} & x\neq 2\\ \frac{1}{2} & x=2\end{cases}$$

נשים לב שהפונקציה מוגדרת ב $x=2$ אבל אין לה גבול שם, משום ש:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=0\neq 1=\lim_{x\to 2^-} f(x)$$

תרגיל: מצאו $a,b\in\mathbb{R}$ כך שהפונקציה הבאה תהיה רציפה:

$$f(x)=\begin{cases}-2\sin(x) & x\leq -\frac{\pi}{2}\\ a\sin(x)+b & -\frac{\pi}{2}<x\leq\frac{\pi}{2}\\ \cos(x) & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

פתרון:

לכל $x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ הפונקציה רציפה כהרכב של פונקציות אלמנטריות רציפות)

נותר לבחון מה קורה בנקודות $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

1. $x=-\frac{\pi}{2}$: מתאים

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = -2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \cancel{-2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2}$$

$$= a\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b = -a+b$$

כדי שהגבול יהיה קיים חייב להתאים

$$-a+b=2$$

שימו לב שאם אנו שהפונקציה תהיה רציפה חייב להתאים

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

סה"כ לכן נקבל מהתנאי $-a+b=2$

2. $x=\frac{\pi}{2}$: מתאים

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+b = a+b$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

לכן התנאי

לקיום הגבול הוא

$$a+b=0$$

סה"כ נקבל:

$$\begin{cases} -a+b=2 \\ a+b=0 \end{cases}$$

ומכאן $a=1$, $b=-1$

מיון נקודות אי רציפות

הגדרה (אי רציפות סליקה)

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה $x=x_0$ פרט אולי לנקודה x_0 עצמה. נאמר כי x_0 היא נקודת אי רציפות סליקה אם:

1. קיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ או שהפונקציה אינה מוגדרת ב- x_0.

דוגמה: הראה כי לפונקציה $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$ יש אי רציפות סליקה ב- $x=2$.

פתרון: $f(x)$ מוגדרת בסביבת $x=2$ אך אינה מוגדרת ב $x=2$ עצמה.

כמו כן:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$$

הגבול קיים ולכן הנקודה היא אי רציפות סליקה.

הערה: ניתן להפוך את הפונקציה הנ"ל לרציפה ע"י כך שנגדיר אותה ב $x=2$ להיות 12, כלומר:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x^3-8}{x-2} & x\neq 2\\ 12 & x=2\end{cases}$$

כלומר הוספנו את $x=2$ לתחום ההגדרה של f.

הגדרה: נק' $x=x_0$ נקראת נק' אי רציפות ממין ראשון של הפונק' $f(x)$ אם:

1. $f(x)$ מוגדרת בסביבה מסוימת של $x=x_0$ פרט אולי לנקודה x_0 עצמה.
2. קיימים הגבולות החד צדדיים.
3. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

דוגמא:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<1 \\ x+1 & x\geq 1 \end{cases}$$

קל לראות שהגבולות החד צדדיים קיימים אך שונים ב $x=1$ ולכן זו נקודת אי רציפות ממין ראשון.

הגדרה: נק' x_0 נקראת נק' אי רציפות ממין שני של f אם:

א) $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0 פרט אולי ל-x_0 עצמה.

ב) לפחות אחד מהגבולות החד צדדיים אינו קיים (במובן הרחב).

דוגמא: $x=0$ היא נקודת אי רציפות של $f(x)=\cos(\frac{1}{x})$. אף אחד מהגבולות החד צדדיים אינו קיים ב $x=0$.

תרגיל: מיין את כל סוגי רציפות של הפונקציה הבאה:

1.
$$f(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)}{\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)}$$

פתרון: לפני שנמיין את הנקודות, נבדוק כל (נמצא תחום: הפונקציה שלנו לא מוגדרת בנקודות $x=0,-1,1$.

נעשה מכנה משותף:

$$f(x)=\frac{x(x-1)}{x(x+1)}$$

עבור $x=0$ נבדוק:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)}{x+1}=-1$$

הגבול קיים ולכן $x=0$ היא אי רציפות סליקה.

עבור $x=1$ נבדוק:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x(x+1)}=0$$

ולכן אי רציפה: זה מסוג סליקה...

עבור $x=-1$ נבדוק:

הפונקציה שלנו לא מוגדרת כי המכנה שלה מתאפס ולכן מספיק לנו לבדוק גבול חד צדדי אחד.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x+1}=-\infty$$

ה.

$$f(x)=\frac{x}{\sin(\sqrt{|x|})}$$

פתרון: נקודות אי רציפות כאן הן אותן נקודות
שבהן המכנה מתאפס לכן הנקודות $x_k=\pm(\pi k)^2$
לכן לכל $k\in\mathbb{Z}$ אלה הן נק' אי רציפות.
נחלק לשני מקרים:

1. אם $k\neq 0$ נקבל $\lim\limits_{x\to x_k^+} f(x)=\pm\infty$ ולכן הגבול
החד צדדי אינו קיים ולכן זו נקודת אי
רציפות ממין שני.

2. $k=0$ נקבל

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(\sqrt{x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\sqrt{|x|}}\cdot\frac{|x|}{|x|}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sqrt{|x|}}{\sin(\sqrt{|x|})}}_{\downarrow\ 1}\cdot\underbrace{\frac{x\cdot\sqrt{|x|}}{|x|}}_{\downarrow\ 0}=0$$