תרגיל 7 בפונקציות מרוכבות

1. תהיינה $f(z)$ ו $g(z)$ פונקציות שלמות כך ש $|f(z)| < |g(z)|$ לכל $z \in \mathbb{C}$. הוכיחו כי $f(z) = cg(z)$ כך ש $c \in \mathbb{C}$ עם $|c| < 1$.
פתרון: נשים לב ש $g(z)$ לא יכולה להתאפס כי $|f(z)| < |g(z)|$ כלומר יש מספר אי שלילי ש $|g(z)|$ גדול ממנו. לכן

$$\frac{f(z)}{g(z)}$$

היא פונקציה שלמה ומתקיים

$$|\frac{f(z)}{g(z)}| < 1$$

לכן לפי ליוביל

$$\frac{f(z)}{g(z)} = c$$

כלומר

$$f(z) = cg(z)$$

כמובן היות ש

$$|\frac{f(z)}{g(z)}| < 1$$

בהכרח

$$|c| < 1$$

כנדרש.

2. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות

   (א) אם לכל z מתקיים $f(z) = f(iz)$ אז f קבועה.
   פתרון: לא נכון. $f(z) = z^4$ היא דוגמא נגדית.

   (ב) אם לכל z מתקיים $f(z) = f(3z)$ אז f קבועה.
   פתרון: על עיגול היחידה $\{z \mid |z| \le 1\}$ אנחנו יודעים ש $f(z)$ חסומה כי היא רציפה. כלומר קיים M כך שלכל z המקיים $|z| \le 1$ מתקיים $|f(z)| \le M$ אבל לכל $z \in \mathbb{C}$ יש n טבעי כך ש $|\frac{z}{3^n}| \le 1$ ואז

$$|f(z)| = |f(\frac{z}{3})| = |f(\frac{z}{3^2})| = \cdots = |f(\frac{z}{3^n})| \le M$$

   ולכן $f(z)$ חסומה ולכן קבועה.

3. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $|f(z) - f(2z)| \le 10$, הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.
פתרון: נגדיר $g(z) = f(z) - f(2z)$ היא גם פונקציה שלמה אבל היא חסומה ולכן $g(z)$ קבועה. כלומר קיים c כך ש $f(z) - f(2z) = c$. אם נציב $z = 0$ נגלה ש $c = 0$ ולכן $f(z) = f(2z)$. מכאן מוכיחים ש f קבועה כמו בשאלה 4ב.

4. תהי $f(z)$ אנליטית בפנים ועל השפה של העיגול $\{z \mid |z-a|=R\}$. f כמובן חסומה על השפה של המעגל. נסמן ב M חסם, כלומר $|f(z)| \leq M$ לכל z כך ש $|z-a|=R$. הוכיחו כי

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{R^n}$$

פתרון: נסמן ב Γ_R את העיגול שמרכזו ב a ורדיוסו R. לפי נוסחת קושי מתקיים

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

ולכן

$$|f^{(n)}(a)| \leq |\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z| = \frac{n!}{2\pi}|\int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z|$$

לפי חסם ML. מתקיים

$$|\int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z| \leq \frac{M}{R^{n+1}}2\pi R = \frac{2\pi M}{R^n}$$

וכך מקבלים הדרוש.