תרגיל 7

1. בכמה מספרים שש ספרתיים מופיעה הספרה:

א. 0 פעם אחת בדיוק;
ב. 4 פעם אחת לפחות;
ג. 0 פעם אחת לפחות;
ד. 4 פעם אחת בדיוק.

2. בכמה אופנים שונים ניתן להושיב בספסל (בן 10 מושבים) 5 זוגות נישואים בתנאי ש-

א. כל אחד רשאי לשבת בכל מושב (אבל בכל מושב יושב בו זמנית רק בן אדם אחד בלבד);
ב. בקצוות יושבים גברים;
ג. בין כל שני גברים יושבת אישה;
ד. כל הנשים יושבות אחת ליד השניה;
ה. כל אישה יושבת לצד בעלה.

3. חזור על השאלה 2 כאשר במקום הספסל מדובר בשולחן עגול.

4. יהי $k > 0$ מספר כלשהו. נתונים $10k$ כדורים שונים.

א. בכמה דרכים ניתן לחלק אותם ל- k תאים שונים?
ב. בכמה דרכים ניתן לחלק אותם ל- k תאים שונים כך שבכל תא יהיו 10 כדורים בדיוק?
ג. בכמה דרכים ניתן לחלק אותם ל- k תאים זהים כך שבכל תא יהיו 10 כדורים בדיוק?

5. יהי $n > 0$. בכמה דרכים ניתן לחלק $2n$ כדורים לבנים ו- n כדורים צבעוניים (ב- n צבעים שונים) ל-

א. $3n$ תאים, כדור אחד בכל תא;
ב. $3n$ תאים, כדור לבן אחד לכל היותר בכל תא;
ג. n תאים, מספר שווה של כדורים לבנים וצבעוניים בכל תא.

6. בכמה אופנום שונים ניתן להושיב n אנשים בספסל בן k מקומות ? יש להבדיל בין ה מקרים $n \le k$ ו- $n > k$.

7. מהו מספר החלוקות של מספר כלשהו של כדורים זהים ל- n תאים שונים, אם מספר הכדורים בכל תא (פרט לראשון) צריך להיות יותר גדול ממספר הכדורים בתא שלפניו, ובכל תא אפשר לשים לכל היותר k כדורים.

8. בכמה דרכים ניתן לבחור k שלמים מתוך הקבוצה $\{1, \cdots, n\}$ כך שלא יהיה אף זוג שלמים עוקבים.

9. מ-3 סטודנטים של שנה א, 5 סטודנטים של שנה ב, 4 סטודנטים של שנה ג ו-2 מסטרנתים מרכיבים ועד. בכמה אופנים שונים ניתן לעשות זאת אם:
   א. בועד יש 4 אנשים;
   ב. בועד יש נציג אחד לכל אחת מהקבוצות הנ"ל;
   ג. בועד יש 2 אנשים : נציג אחד לתלמידי שנים א ו-ב ו נציג אחד לתלמידי שנה ג ולמסטרנטים;
   ד. בוועד יש 3 אנשים שהם נציגים של 3 קבוצות שונות.

10. אני מעוניין לחלק k מטבעות של שקל בין n ילדים. לא משנה כמה שקלים מתוך ה k נותנים לכל ילד (בין 0 ל k). בכמה דרכים שונות ניתן לבצע החלוקה?

11. הוכח ש

$$\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}=n^2 .$$

תן\י שתי הוכחות, אחת קומבינאטורית, ואחת בשימוש הנוסחה האלגברית למקדמים בינומיים.

12. הוכח\י בשתי דרכים (אלגברית וקומבינאטורית) ש $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

13. הוכח באופן קומבינאטורית שעבור $0\le m\le k\le n$ נכון ש

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} .$$