אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 5

1. יהי F שדה ממאפיין p. הראו שהפולינום $p(x)=x^p-x-a$ אי-פריק אם ורק אם אין לו שורש ב F.
2. הראו ששדה F ממאפיין $p>0$ הוא מושלם אם ורק אם לכל איבר $a\in F$ יש שורש p-י ב F.
3. יהי $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ פולינום אי-פריק מדרגה 3, ויהי $E/\mathbb{Q}$ שדה הפיצול שלו. הראו שאם יש ל $f(x)$ שורש $\alpha\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ אזי $Gal(E/\mathbb{Q})=S_3$.
4. הראו שאם $\rho_n\in F$ שורש יחידה n-י פרימיטיבי של היחידה, אזי חבורת גלואה של שדה הפיצול של פולינום $x^n-a\in F[x]$ היא חבורה ציקלית מסדר המחלק את n.
5. א. בהנתן שדות $B,C\subseteq E$ נגדיר את הקומפוזיטום שלהם $B\vee C$ להיות החיתוך של כל השדות ב E המכילים את B,C. הראו שאם $a_1,...,a_n\in E\supseteq F$ אזי $F(a_1)\vee...\vee F(a_n)=F(a_1,...,a_n)$.
ב. אם $F\subseteq B_1\subseteq E$ שדות, כך ש E שדה פיצול של פולינום אי-פריק $f(x)\in F[x]$ וגם B_1 מכיל שורש של $f(x)$ אזי קיימים שדות איזומורפיים מעל F (כלומר שהאיזומורפיזמים קובעים את F) $B_1,...,B_n$ כך ש $E=B_1\vee...\vee B_n$.
6. יהי $F=\mathbb{Z}_p(t)$. הראו שהפולינום $f(x)=x^p-t$ אי-פריק (ללא שימוש בהכללה של משפט איזנשטיין, ואם אתם משתמשים בטיעון שאין איבר $q\in F$ כך ש $q^p=t$, יש להוכיח זאת). מצאו שדה פיצול E/F של $f(x)$ וחשבו את דרגת ההרחבה. חשבו את $Gal(E/F)$.