תרגיל 8 בפונקציות מרוכבות

1. מצאו את כל הפונקציות השלמות המקיימות $f''(\frac{1}{n!}) + f(\frac{1}{n!}) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
פתרון: נזכור שאם f שלמה אז בוודאי שf'' שלמה. לכן, לפי משפט היחידות

$$f''(z) + f(z) = 0$$

זאת משוואה דיפרנציאלית שפתרונה:

$$f(z) = c_1 e^{iz} + c_2 e^{-iz}$$

2. תהינה $f_1(z), \cdots, f_m(z)$ מספר סופי של פונקציות אנליטיות ב $A = \{z \mid |z| < 1\}$ ונתון כי לכל $z \in A$

$$f_1(z) \cdots f_m(z) = 0$$

הוכיחו כי לפחות אחת מהפונקציות האלה היא פונקצית האפס.
פתרון: נגדיר

$$E_i = \{z \mid |z| \le \frac{1}{2} \text{ and } f_i(z) = 0\}$$

לפי הנתון, ברור ש

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \{z \mid |z| \le \frac{1}{2}\}$$

ולכן לפחות אחת מבין קבוצות אלו היא אינסופית. בלי הגבלת כלליות E_1 היא אינסופית. E_1 היא קבוצה אינסופית וחסומה, ולכן לפי בולצאנו ווירשטראס יש לה נקודת הצטברות, נניח p. ברור ש $p \in A$ (למעשה $p \in \{z \mid |z| \le \frac{1}{2}\}$ כי זאת קבוצה סגורה) וגם $E_1 \subseteq A$ ו A קבוצה פתוחה. אז בעצם f_1 מתאפסת על E_1 שהיא קבוצה ב A עם נקודת הצטברות ב A ולכן לפי משפט היחידות

$$f_1(z) = 0 \quad \forall z \in A$$

3. מצאו את כל הפונקציות השלמות המקיימות $f(f(z)) = f(z)$.
פתרון: ראשית נשים לב שכל הפונקציות הקבועות מקיימות את הדרישה. אם $f(z)$ שלמה אבל לא קבועה, אז $f(\mathbb{C})$ היא קבוצה עם נקודת הצטברות ב$\mathbb{C}$. (ראינו בתרגול ש $f(\mathbb{C})$ צפופה ב $\mathbb{C}$ ולכן כל נקודה היא נקודת הצטברות של $f(\mathbb{C})$) אבל לפי הנתון, לכל $a \in f(\mathbb{C})$ מתקיים $f(a) = a$ ולכן לפי משפט היחידות $f(z) = z$. כמו כן, $f(z) = z$ באמת מקיימת את התנאי. לסיכום הפונקציות שמקיימות את התנאי הנ"ל הן בדיוק הפונקציות הקבועות ו $f(z) = z$.

4. מצאו את כל הפונקציות האנליטיות ב $\{z \mid |z| < 2\}$ המקיימות ש $f(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

פתרון: אנחנו רוצים כמובן להשתמש במשפט היחידות. נסמן $z = 1 - \frac{1}{n}$, כלומר $n = \frac{1}{1-z}$ ונציב זאת באגף ימין:

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} = (1-z)^2 - (1-z) = 1 - 2z + z^2 - 1 + z = z^2 - z$$

כלומר,אם נגדיר $g(z) = z^2 - z$ אז יתקיים שלכל $n \in \mathbb{N}$

$$f(1 - \frac{1}{n}) = g(1 - \frac{1}{n})$$

ולכן לפי משפט היחידות

$$f(z) = z^2 - z$$

בכל התחום המדובר.

5. האם קיימת פונקציה שלמה המקיימת $|f(z)| = |1 - |z||$ לכל $z \in \mathbb{C}$.
פתרון: נניח שקיימת כזו פונקציה, אז לכל z על מעגל היחידה מתקיים

$$|f(z)| = |1 - |z|| = 0$$

כלומר $f(z) = 0$ על מעגל היחידה, ולפי עקרון היחידות $f(z) = 0$. אבל $f(z)$ לא מקיימת את התנאי שלעיל ולכן אין פונקציות כנ"ל.

6. מצאו את האפסים של הפונקציות הבאות ומצאו את הסדר שלהם.

(א) $(e^z - 1)\sin z \cos z$.
ל $e^z - 1$ יש אפס בנקודות $z = 2\pi ik$ וזה אפס מסדר 1 כי הנגזרת (שהיא e^z) לא מתאפסת.
ל $\sin z$ יש אפס בנקודות $z = \pi k$ וזה אפס מסדר 1 כי הנגזרת $\cos z$ לא מתאפסת בנקודות אלו.
ל $\cos z$ יש אפס בנקודות $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ושוב אלו אפסים מסדר 1 כי הנגזרת $-\sin z$ לא מתאפסת בנקודות אלה.
בסך הכל למכפלה יש:
בנקודות $z = 2\pi ik$ כאשר $k \neq 0$ יש אפס מסדר 1.
בנקודות $\frac{\pi}{2}k$ כאשר $k \neq 0$ יש אפס מסדר 1.
בנקודה $z = 0$ יש אפס מסדר 2.

(ב) $\sin z^2$.
כזכור $\sin z$ מתאפסת כאשר $z = \pi k$ וזה אומר שהאפסים של הפונקציה הם בנקודות

$$z = \pm\sqrt{\pi k} \quad z = \pm i\sqrt{\pi k} \quad k \geq 0$$

הנגזרת של הפונקציה היא

$$2z \cos z^2$$

האפס היחיד שבו הנגזרת גם מתאפסת הוא $z = 0$. בנקודה זו יש אפס מסדר 2 ואת זה קל לראות לפי הפיתוח טיילור

$$\sin z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} + \cdots$$

ולכן לסיכום $k \in \mathbb{N} \quad z = \pm i\sqrt{\pi k} \quad z = \pm\sqrt{\pi k}$ הם כולם אפסים מסדר 1 ו $z = 0$ הוא אפס מסדר 2.