

תרגיל בית 10 – אינפי' 1

שאלה 1

- א. תהיי פונקציה ממשית f כך ש- $f(x) = -f(-x)$ לכל $x \neq 0$. נתון ש- f רציפה באפס. הוכיחו ש- $f(0) = 0$.
- ב. תנו דוגמא לפונקציה כזו, וודאו שאכן היא מתאפסת באפס.

שאלה 2

ניח ו $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, וניח ש g רציפה ב a . הוכיחו $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(a)$ (רמז: האפסילון בהגדרת הגבול לפי קושי של הגבול של f הופך להיות הדלתא של הגדרת הגבול לפי קושי של $(g(f(x)))$).

שאלה 3

מיינו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות: (רמז בהמשך הבא)

a. $\sin(\ln x^2)$

b. $\sin\left(\frac{1}{\ln x^2}\right)$

c. $\frac{5x+4}{|5x+4|}$

d. $e^{-\frac{1}{\sin x}}$

e. $\frac{1}{e^{(\sin x)^2}}$

רמז לסעיפים קודמים: על מנת להוכיח שאין לפונקציה f גבול בנקודה a מספיק למצוא שתי סדרות $x_n, y_n \rightarrow a, x_n \neq y_n$ כך שאחד הגבולות $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$ אינו קיים או שהגבולות הנ"ל שונים.

דוגמא: הוכיחו שלפונקציה הבאה אין גבול בנקודה 0: $f(x) = \cos\left(\sqrt{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)}\right)$

פתרון: יש למצוא שתי סדרות $x_n, y_n \rightarrow 0, x_n \neq y_n$ כמו שמצויין למעלה. יהיה הכי קל למצוא סדרות כך ש $f(x_n), f(y_n)$ קבועים שונים ללא תלות ב n .

למשל נרצה ש $f(x_n) = 1, f(y_n) = -1$

אנו יודעים ש $\cos(2\pi n) = 1, \cos(\pi + 2\pi n) = -1$.

$$\sqrt{\ln\left(\frac{1}{|x_n|}\right)} = 2\pi n \quad \text{לכן אנחנו רוצים}$$

$$\ln\left(\frac{1}{|x_n|}\right) = (2\pi n)^2 \quad \text{לכן רוצים}$$

$$\frac{1}{|x_n|} = e^{(2\pi n)^2} \quad \text{לכן}$$

$$0 \neq x_n \rightarrow 0 \quad \text{קל לוודא ש } x_n = \frac{1}{e^{(2\pi n)^2}}$$

$$0 \neq y_n \rightarrow 0 \quad \text{באופן דומה } y_n = \frac{1}{e^{(\pi+2\pi n)^2}}$$

$$\begin{aligned} f(x_n) = 1 &\rightarrow 1 \\ f(y_n) = -1 &\rightarrow -1 \end{aligned} \quad \text{ולכן לפי הבנייה,}$$

ולכן לפי היינה אין גבול בנקודה.

שאלה 4

תהי פונקציה f רציפה בקטע הפתוח (a,b) , כך שלכל $x \in (a,b) \quad f(x) \in \mathbb{Q}$ (כלומר הפונקציה מקבלת ערכים רציונאליים בלבד בקטע). הוכיחו/הפריכו: פונקציה קבועה.

שאלה 5

[שאלה ממבחן של פרופ' זלצמן] זהו וסווגו את נקודות אי הרציפות של הפונקציה: $\frac{1}{\log|x|}$

שאלה 6

תהיינה f, g פונקציות רציפות בקטע $[0,1]$ המקיימות $g([0,1]) = [0,1]$ ו-
 $f(x_0) = g(x_0)$ שעבורה $x_0 \in [0,1]$. הוכיחו שקיימת נקודה $f([0,1]) \subseteq [0,1]$.

שאלה 7

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0, a]$, כך שמתקיים $f(a) = f(0)$. הוכיחו שקיים

$$f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{a}{2}\right) \text{ כן ש-} x_0 \in \left[0, \frac{a}{2}\right].$$

שאלה 8

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0, \infty)$ כך שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. הוכיחו כי f מקבלת או מינימום או מקסימום (ז"א, לפחות אחד מהם).

שאלה למחשבה

תנו דוגמא לפונקציה רציפה ב $(0, 1]$ כך שאינה חסומה מלעיל ואינה חסומה מלרע ב- $(0, 1]$. הוכיחו שהיא אכן כזו.

בהצלחה!