

פתרון תרגיל בית מספר 12

תרגילים מהחוברת

עמוד 54 והלאה:

שאלה 2.6

יהי $\sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) = 0$ צירוף ליניארי. נוכיח שהוא טריוויאלי. T העתקה ליניארית ולכן:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = 0$$

מכאן, $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in \ker(T)$. כמו כן נתון, $v_1, \dots, v_n \in U$ וכן U

ת"מ של V . לכן $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in U$. בסה"כ נקבל $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in U \cap \ker(T)$. אבל נתון ש

$$U \cap \ker(T) = \{0\} \text{ לכן } \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0 \text{ בת"ל ולכן } \alpha_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n$$

שאלה 2.7

א. לא נכון - אם ניקח את העתקת האפס למשל.

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, 0)$$

משהו יותר מעניין: קחו את העתקת ההטלה:

רואים שמתקיים הדרוש, ועם זאת – זוהי לא העתקת הזהות!

ב. נוכיח תחילה ש- $\ker(T) \cap \text{im}(T) = \{0\}$. יהי $v \in \ker(T) \cap \text{im}(T)$ ז"א $T(v) = 0$ וכן

קיים $w \in V$ כך ש $T(w) = v$ כעת על פי הנתון $T(T(w)) = T(v)$ ומכיוון ש $T(v) = 0$

$$T(T(w)) = 0 \text{ ומכיוון ש } T^2 = T \text{ נקבל ש } T(T(w)) = T(w) = v = 0$$

כעת נוכיח ש $V = \ker(T) + \text{im}(T)$ יהי $v \in V$ אז $v = v - T(v) + T(v)$ כעת

$$T(v) \in \text{im}(T) \text{ ומכיוון ש } T^2 = T \text{ נקבל } T(v - T(v)) = T(v) - T(T(v)) = 0 \text{ ולכן}$$

$$v - T(v) \in \ker(T)$$

שאלה 2.8

נוכיח ש $\ker(T_1) = \text{im}(T_2)$. יהי $v \in \ker(T_1)$ על פי הנתון ב (א) נקבל $(T_1 + T_2)(v) = 0$. מכיוון

ש-

$$v \in \ker(T_1) \text{ נקבל } v = (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) = 0 + T_2(v) = T_2(v)$$

יהי $v \in \text{im}(T_2)$ ז"א קיים w כך ש $T_2(w) = v$ כעת על פי הנתון בסעיף (ב) נקבל ש -

$$T_1(T_2(w)) = 0 \text{ ולכן } T_1(v) = 0 \text{ ז"א } v \in \ker(T_1)$$

כעת על פי הנתון ב (ג) $T_1^2 = T_1$ ועל פי תרגיל קודם $V = \ker(T_1) \oplus \text{im}(T_1)$. הוכחנו ש -

$$V = \ker(T_1) \oplus \text{im}(T_2)$$

הערה: שימו לב שבהוכחה בדרך זו אנו לא משתמשים בנתון $T_2^2 = T_2$.

ניתן להוכיח את ההכלה $\text{Im} T_2 \subseteq \ker T_1$ גם בדרך אחרת ובהסתמכות על $T_2^2 = T_2$ תוך ויתור על הצורך בנתון בסעיף ב (מסתבר שיש נתון מיותר בשאלה), יהי $v \in \text{im}(T_2)$, ז"א קיים w כך ש $T_2(w) = v$. נשים לב שעפ"י סעיף ג' $T_2(v) = T_2^2(w) = T_2(w) = v$. עפ"י סעיף א נקבל $T_1(v) + T_2(v) = v$ ואם נציב את השוויון הקודם הרי ש- $T_1(v) + v = v$ ומכאן $T_1(v) = 0$ ז"א $T_1(v) \in \ker(T_1)$. ומכאן ההוכחה מסתיימת כמו בשלב הקודם.

שאלה 2.11

ב \Leftarrow א

תהא $S: V \rightarrow V$ ז"א קיים $v \in V$ כך ש $S(v) \neq 0$. כעת נתון ש $T(S(v)) = 0$ ולכן $0 \neq S(v) \in \ker(T)$.

א \Leftarrow ב

תהא $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית כך ש $\ker(T) \neq \{0\}$ ז"א קיים $v \in V$ ש $v \neq 0$ שעבורו $T(v) = 0$.

כעת יהי $\{v_i\}_{i=1}^n$ בסיס של V . על פי משפט ההגדרה של העתקה ליניארית, קיימת העתקה ליניארית יחידה $S: V \rightarrow V$ שעבורה $S(v_i) = v$ לכל $1 \leq i \leq n$. כעת יהי $w \in V$. מכיוון ש- $\{v_i\}_{i=1}^n$ הוא בסיס של V קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ שעבורם $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. כעת T, S העתקות ליניאריות ולכן $TS(w) = TS(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) = T(\sum_{i=1}^n \alpha_i S(v_i)) = T(\sum_{i=1}^n \alpha_i v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v) = 0$.

שאלה 2.15

א. קל.

ב. נמצא תחילה את הגרעין:

צריך למצוא את המטריצות שעבורן מתקיים

$$\text{ז"א מתקיימים המשוואות הבאות:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{21} = a_{11} \\ a_{12} + 2a_{22} = 2a_{11} + 3a_{12} \\ 3a_{21} = a_{21} \\ 3a_{22} = 2a_{21} + 3a_{22} \end{cases}$$

ז"א $a_{21} = 0 \wedge a_{22} = a_{11} + a_{12}$ ולכן הבסיס הוא: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

קעת נמצא את $im(T_A)$. הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ מהווה בסיס

ל $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ולכן מספיק לחשב את

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל שהבסיס הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

שאלה 2.16

בכל הסעיפים ניעזר במשפט הדרגה: $\dim \text{Im} T + \dim \ker T = \dim V$ ובעובדות
 $\dim \ker T = 0 \Leftrightarrow T$ חח"ע, $\dim \text{Im} T = \dim W \Leftrightarrow T$ על

א. אם $\dim V < \dim W$ אזי

$$\dim \text{Im} T = \dim V - \dim \ker T < \dim W - \dim \ker T \leq \dim W$$

$\dim \text{Im} T < \dim W$ ו- T אינה על.

ב. אם $\dim V > \dim W$ אזי

$$\dim \ker T > 0 \text{ ולכן } \dim \ker T = \dim V - \dim \text{Im} T > \dim W - \dim \text{Im} T \geq 0$$

וההעתקה אינה חח"ע.

ג. אם $\dim V = \dim W$ אזי:

$$\Leftrightarrow \dim \text{Im} T = \dim V \Leftrightarrow \dim \ker T = 0 \Leftrightarrow T \text{ חח"ע}$$

$$\dim \text{Im} T = \dim W$$

T על \Leftrightarrow

שאלה 6.12

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(v_1)]_B & [T(v_2)]_B \\ | & | \end{pmatrix}, B = \{v_1, v_2\} \text{ יהי} \\ [T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ לכן,}$$

$$T(v_1) = -1v_1 + 0v_2 = -v_1$$

$$T(v_2) = 2v_1 + v_2$$

ידוע שההעתקה היא העתקת שיקוף ביחס לציר ה- x ולכן אם נסמן $v_1 = (x, y)$ אזי $T(x, y) = (x, -y)$ וכמו כן מהנתון הקודם $T(x, y) = (-x, -y)$ לכן $x = -x = 0$.

אם ניקח $v_1 = (0, 1)$, ונסמן $v_2 = (t, s)$. צריך להתקיים

$$T(v_2) = 2v_1 + v_2 \rightarrow T(s, t) = (0, 2) + (s, t)$$

ובגלל שההעתקה היא שיקוף, $T(s, t) = (s, -t)$ ולכן מקבלים את המשוואה:

$$(0, 2) + (s, t) = (s, -t) \rightarrow t = -1$$

בת"ל. למשל, אפשר לבחור: $B = \{(0, 1), (1, -1)\}$.

שאלה 6.14

$$T(1, 0, 0, 0) = (2, 4, 5, 7)$$

$$T(0, 1, 0, 0) = (1, 2, 1, 1)$$

א. תחילה, נגדיר את ההעתקה לפי משפט ההגדרה: (שימו)

$$T(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$T(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

לב ששני ווקטורי הבסיס האחרונים לא היו חייבים להישלח לאפס, אבל כן למשהו תלוי ליניארית בשני ווקטורי התמונה. זאת על מנת לא להגדיר את $\text{Im}(T)$ מעבר לנתון).

כעת נמצא את ההעתקה בצורה מפורשת:

$$\begin{aligned} T(x, y, z, w) &= T(x(1, 0, 0, 0) + y(0, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + w(0, 0, 0, 1)) = \\ &= xT(1, 0, 0, 0) + yT(0, 1, 0, 0) + zT(0, 0, 1, 0) + wT(0, 0, 0, 1) = \\ &= x(2, 4, 5, 7) + y(1, 2, 1, 1) = (2x + y, 4x + 2y, 5x + y, 7x + y) \\ &\Rightarrow T(x, y, z, w) = (2x + y, 4x + 2y, 5x + y, 7x + y) \end{aligned}$$

ב. + ג. נשלים את הווקטורים הנתונים לבסיס ונגדיר את ההעתקה לפי משפט ההגדרה:

$$T(1, 3, 7) = (0, 0, 0)$$

$$T(2, 5, 6) = (0, 0, 0)$$

$$T(0, 0, 1) = (1, 2, 3)$$

שימו לב: שני הווקטורים הראשונים חייבים להיות אפס, היות ומקורותיהם פורשים את הגרעין. הווקטור השלישי בתמונה יכול להיות ווקטור שרירותי. בחרנו דווקא את $(1, 2, 3)$ כי כך נפתור גם את הסעיף האחרון במכה אחת עם הנוכחי.

כעת, על מנת למצוא את ההעתקה בצורה מפורשת, עלינו לייצג ווקטור שרירותי במרחב לפי הבסיס הנתון: $(x, y, z) = \alpha(1, 3, 7) + \beta(2, 5, 6) + \gamma(0, 0, 1)$. נפתור את

$$\text{מערכת המשוואות המתאימה ונקבל: } \begin{cases} \alpha = -5x + 2y \\ \beta = 3x - y \\ \gamma = 17x - 8y + z \end{cases}, \text{ ולכן:}$$

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= T((-5x + 2y)(1, 3, 7) + (3x - y)(2, 5, 6) + (17x - 8y + z)(0, 0, 1)) = \\ &= (-5x + 2y)T(1, 3, 7) + (3x - y)T(2, 5, 6) + (17x - 8y + z)T(0, 0, 1) = \\ &= (-5x + 2y)(0, 0, 0) + (3x - y)(0, 0, 0) + (17x - 8y + z)(1, 2, 3) = \\ &\Rightarrow T(x, y, z) = (17x - 8y + z, 34x - 16y + 2z, 51x - 24y + 3z) \end{aligned}$$

תרגיל לא מהחוברת

תהי $T: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ העתקה ליניארית. יהיו

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

ב- $\mathbb{R}_2[x]$ ו- $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ בסיסים עבור $F = \{3x^2 + 2x + 1, x^2 + 3x + 2, 2x^2 + x + 3\}$

בהתאמה. נגדיר את ההעתקה באופן הבא: $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^2 - 2bcx + a + d$

מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_F^E$.

פתרון:

נסמן ב- S_1 את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ וב- S_2 את הבסיס הסטנדרטי של

$\mathbb{R}_2[x]$. נמצא את המטריצה הדרושה באמצעות הנוסחא:

$$\cdot [T]_F^E = [I]_F^{S_2} [T]_{S_2}^{S_1} [I]_{S_1}^E$$

נמצא כל אחת מהמטריצות.

$$[I]_{S_1}^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$[I]_F^{S_2} = \left([I]_{S_2}^F \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{S_2}^{S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן, לאחר שמחשבים את המכפלה, מקבלים:

$$\cdot [T]_F^E = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -3 & -10 & 2 & -18 \\ -3 & 2 & -4 & 0 \\ 15 & 14 & 8 & 36 \end{pmatrix}$$