# ב"ש אנליזה 2 תשעט מועד א

1. חשבו את:

(א) $\int \frac{x^2+2}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

פתרון: נשתמש בשברים חלקיים: קיימים $A,B,C$ קבועים כך ש

$$\frac{x^2+2}{x\left(x-1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{\left(x-1\right)}+\frac{C}{\left(x-1\right)^2}.$$

נעשה מכנה משותף והשוואת מונים לקבל

$$x^2+2=A\left(x-1\right)^2+Bx\left(x-1\right)+Cx.$$

נציב $x=1$ לקבל $C=3$ ואז נשאר עם

$$x^2-1=A\left(x-1\right)^2+Bx\left(x-1\right)$$

ובהנחה ש $x\neq 1$ נוכל לחלק ב $x-1$ לקבל

$$x+1=A\left(x-1\right)+Bx$$

ונציב $x=0$ לקבל $-A=1$ כלומר $A=-1$ ואז נשאר עם $x+1=-\left(x-1\right)+Bx$ או

$$2x=Bx$$

ונקבל ש $B=2$. סה"כ קיבלנו ש

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+2}{x\left(x-1\right)^2}\mathrm{d}x&=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+2\int\frac{1}{\left(x-1\right)}\mathrm{d}x+3\int\frac{1}{\left(x-1\right)^2}\mathrm{d}x\\&=-\ln|x|+2\ln|x-1|+3\cdot\frac{(-1)}{x-1}+C\end{aligned}$$

(ב) $\int x\tan\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

פתרון: נשתמש בהצבה לחשב $\int \tan(t)\mathrm{d}t = \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\mathrm{d}t &= \left\{ \begin{array}{c} s = \cos(t) \\ \mathrm{ds} = -\sin(t)\mathrm{d}t \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{-1}{s}\mathrm{ds} \\ &= -\ln|s| + C \\ &= -\ln|\cos(t)| + C\end{aligned}$$

כעת, לחישוב האינטגרל שלנו נשתמש שוב בהצבה:

$$\begin{aligned}\int x\tan\left(x^2\right)\mathrm{d}x &= \left\{ \begin{array}{c} t = x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2}\int \tan(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(-\ln|\cos(t)|\right) + C \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left|\cos(x^2)\right| + C\end{aligned}$$

.2

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x) = x + e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$.

פתרון: אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה לא מוגדרת באפס, נחשב את הגבולות

$$\lim_{x\to 0^+} x + e^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \{0 + e^{\infty}\} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} x + e^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \{0 + e^{-\infty}\} = 0$$

ולכן יש אסימפטוטה אנכית ב $x = 0$ (מצד ימין).

אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{x} = \{1 + \frac{1}{\infty}\} = 1$$

ו

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} x + e^{\left(\frac{1}{x}\right)} - x = \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1$$

ולכן $y = x + 1$ אסימפטוטה משופעת מימין.

אסימפטוטה משופעת משמאל: נחשב את הגבול

$$a = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} 1 + \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{x} = \{1 + \frac{1}{-\infty}\} = 1$$

ו

$$b = \lim_{x\to -\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to -\infty} x + e^{\left(\frac{1}{x}\right)} - x = \lim_{x\to -\infty} e^{\left(\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1$$

ולכן $y=x+1$ אסימפטוטה משופעת משמאל.

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\mathrm{d}x$.
פתרון: הנקודה הבעייתית היחידה היא $\infty$ שהרי ב $x=1$ (ובכל נקודה אחרת) הפונקציה חיובית ובפרט לא מתאפסת. נראה שהאינטגרל שלנו חבר של האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^{2.5}}\mathrm{d}x$ שמתכנס ולכן גם האינטגרל שלנו מתכנס. הפונקציות $\frac{\sqrt{x}}{x^3+1}$ ו $\frac{1}{x^{2.5}}$ חיוביות בתחום $[1,\infty)$ ואפשר להשתמש במבחן הגבול לפונקציות חיוביות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x}}{x^3+1}}{\frac{1}{x^{2.5}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^3}}=1$$

וקיבלנו שהאינטגרלים חברים (קיבלנו מספר סופי שונה מאפס).

.3

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{\int_0^x \sin(t^5)\mathrm{d}t}\ .$$

פתרון: מתקיים ש $\lim_{x\to 0}\int_0^{x^2}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t=0$ (כיוון ש $\sin\left(t^2\right)$ רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0.) ובאופן דומה גם $\lim_{x\to 0}\int_0^x \sin(t^5)\mathrm{d}t=0$ ולכן נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{\int_0^x \sin(t^5)\mathrm{d}t}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin\left(x^4\right)}{\sin\left(x^5\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^5\cdot\sin\left(x^4\right)}{\sin\left(x^5\right)x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^5}{\sin\left(x^5\right)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^4\right)}{x^4}=2\cdot 1=2$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\frac{\sqrt{k}}{n}$.
פתרון: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\frac{\sqrt{k}}{n}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{k}}{n}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$$

ועבור $f(x)=\sqrt{x}$ שהיא רציפה בקטע $[0,1]$ נקבל ש

$$a_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

.4

(א) קרבו את $\sin\left(\frac{1}{2}\right)$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.
פתרון: טור טיילור של $\sin(x)$ הוא

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ואם נציב $x=\frac{1}{2}$, נקבל

$$\sin\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

שזהו טור לייבניץ ולכן מתקיים שלכל $k$, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right|\leq\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}\right|=\frac{1}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\sin\left(\frac{1}{2}\right)-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש $k$ עבורו $\frac{1}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}\leq\frac{1}{100}$. עבור $k=2$ נקבל $\frac{1}{120}\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{1}{120}<\frac{1}{100}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{2-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2^1}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3}=\frac{23}{48}$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$כמבוקש.

(ב) קרבו את $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.

פתרון: הטור ההנדסה הוא

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

ואם נציב $-x^2$במקום $x$ נקבל

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

אינטגרל על שני האגפים (בהסתמך תיאוריה של התכנסות במש של טורים ואינטגרלים איבר איבר) נקבל

$$\arctan(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

לכל $|x|<1$. לכן

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}$$

וזהו טור לייבניץ ולכן מתקיים שלכל $k$, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}\right|\leq\left|\frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}\right|=\frac{1}{2k+1}\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\arctan\left(\frac{1}{2}\right)-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש $k$ עבורו $\frac{1}{2k+1}\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}\leq\frac{1}{100}$. עבור $k=2$ נקבל $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}<\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{25}=\frac{1}{100}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{2-1}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}=\frac{11}{24}$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$כמבוקש.

5. תהא $f$ פונקציה רציפה המקיימת לכל $x\in\mathbb{R}$ כי $f(x+2\pi)=f(x)$.

(א) הוכיחו/הפריכו: $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

פתרון: הפרכה: $f(x) = 1$ מקיימת כי $f(x) = f(x + 2\pi)$ כי sin מקיימת זאת. אבל

$$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}x = 2\pi \neq 0$$

(ב) הוכיחו/הפריכו: $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

פתרון: הוכחה: מתקיים כי

$$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

וגם

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

ולכן בשביל להוכיח שיוויון מספיק להראות כי $\int_{-\pi}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$. נראה זאת ע"י החלפת משתנים:

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} t = x - 2\pi \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int_{\pi}^{2\pi} f(t + 2\pi)\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$$