אלגברה מופשטת 3 – תרגול 4

טענה 1: אם $f(x)\in F[x]$ פולינום אי-פריק מעל F ו- α,β שורשים של $f(x)$ אזי $F(\alpha)\cong F(\beta)$.

הוכחה: $F(\alpha)\cong F[x]/<f>\cong F(\beta)$.

טענה 2: אם $F\subseteq K$, וגם $F(\alpha)\underset{\sigma}{\cong}K$ (α לא בהכרח איבר של K) איזומורפיזם שדות כך ש $\forall a\in F,\ \ \sigma(a)=a$ אזי אם נסמן $\beta=\sigma(\alpha)\in K$ נקבל ש β גם שורש של $m_\alpha(x)$ (הפולינום המינימלי של α מעל F), וגם מתקיים $F(\alpha)\cong F(\beta)$.

הוכחה: נסמן $m_\alpha(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$.

$$m_\alpha(\beta)=a_n\beta^n+...+a_0=a_n\sigma(\alpha)^n+...+a_0=\sigma(a_n)\sigma(\alpha^n)+...+\sigma(a_0)=\sigma(a_n\alpha^n+...+a_0)=\sigma(0)=0$$

הערה 3: בצורה דומה ניתן להוכיח שכל אוטומורפיזם ב $Gal(K/F)$ מעביר שורש של פולינום $f(x)\in F[x]$ (לאו דוקא אי-פריק) לשורש של אותו פולינום.

משפט 4: אוטומורפיזם ב $Gal(K/F)$ כאשר $K=F(\alpha_1,...,\alpha_n)$ נקבע ע"י תמונות $\alpha_1,...,\alpha_n$.

משפט 5:

א. אם $a,b\in E-F$ שורשים של פולינום אי-פריק $f(x)\in F[x]$ אזי $F(a)\cong F(b)$.

ב. אם $a,b\in F(a)$ שורשים של פולינום אי-פריק $f(x)\in F[x]$, אזי קיים אוטומורפיזם $\sigma\in Gal(F(a)/F)$ כך ש $\sigma(a)=b$.

משפט 6: אם $K=F(\alpha_1,...,\alpha_n)$ כאשר $\alpha_1,...,\alpha_n$ כל שורשיו של פולינום $f(x)\in F[x]$ (לאו דווקא אי-פריק) אזי $Gal(K/F)\le S_n$, כיוון שכל אוטומורפיזם של K/F הוא תמורה של השורשים $\alpha_1,...,\alpha_n$.

הערה 7: הפולינומים כמעט הכי פשוטים שניתן לחקור הם מהצורה $f(x)=x^n-a\in\mathbb{Q}[x]$, כאשר $a\in\mathbb{Q}$. השורשים של פולינום זה הם $\sqrt[n]{a}\cdot\rho_n^{\,k}$ עבור $1\le k\le n-1$, כאשר $\rho_n=cis\frac{2\pi}{n}$ (שורש יחידה n-י פרימיטיבי). אלה הם n שורשים שונים של $f(x)$ ולכן אלה כולם.

דוגמא: $f(x)=x^3-2\in\mathbb{Q}[x]$, השורשים הם $\sqrt[3]{2},\rho_3\sqrt[3]{2},\rho_3^{\,2}\sqrt[3]{2}$. מהי $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$? נטען שמתקיים $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})=\{id\}$, כלומר החבורה טריויאלית. מתקיים $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\subset\mathbb{R}$ (מדוע?). אם $id\neq\sigma\in Gal(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ אזי $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\ni\beta=\sigma(\sqrt[3]{2})\neq\sqrt[3]{2}$ ומתקיים לפי טענה 2 $f(\beta)=0$. אבל השורשים הנוספים של f אינם ממשיים: $\rho_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\rho_3^{\,2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, סתירה. מכאן נקבל גם

$Gal(\mathbb{Q}(\rho_3\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}), Gal(\mathbb{Q}(\rho_3{}^2\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ הן טריויאליות, כי מתקיים
$Gal(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}) \cong Gal(\mathbb{Q}(\rho_3\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}) \cong Gal(\mathbb{Q}(\rho_3{}^2\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$.

כעת נסמן $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \rho_3\sqrt[3]{2}, \rho_3{}^2\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \rho_3)$. מתקיים $[K:\mathbb{Q}] = 6$ (לפי תרגיל מהתרגול הקודם, כי ההרחבות של $\sqrt[3]{2}, \rho_3$ הן מדרגות זרות), וגם $Gal(K/\mathbb{Q}) \le S_3$, לפי משפט 6, כי כל אוטומורפיזם הוא תמורה של שלושת השורשים $\sqrt[3]{2}, \rho_3\sqrt[3]{2}, \rho_3{}^2\sqrt[3]{2}$. נראה שמתקיים $Gal(K/\mathbb{Q}) = S_3$ ללא שימוש במשפטים נוספים. תחילה נשים לב שקיים אוטומורפיזם מסדר 2 בחבורה:

$$\begin{array}{c} K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \rho_3) \\ | \\ \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

להרחבה העליונה ע"י ρ_3 קיים לפי משפט 5 אוטומורפיזם המחליף בין השורשים $\rho_3, \rho_3{}^2$, אוטומורפיזם זה הוא גם ב $Gal(K/\mathbb{Q})$ (כי הוא קובע את אברי $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ולכן בפרט את אברי $\mathbb{Q}$). למעשה ניתן לראות שזוהי התמורה $\pi_1 = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} & \rho_3\sqrt[3]{2} & \rho_3{}^2\sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{2} & \rho_3{}^2\sqrt[3]{2} & \rho_3\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$.

כדי להראות ש $Gal(K/\mathbb{Q}) = S_3$ מספיק להראות את אחד הבאים:

1. קיים אוטומורפיזם נוסף מסדר 2.
2. קיים אוטומורפיזם נוסף מסדר 3.
3. פעולת $Gal(K/\mathbb{Q})$ על השורשים היא טרנזיטיבית.

נראה את 1: מתקיים גם $K = \mathbb{Q}(\rho_3)(\sqrt[3]{2})$ ולכן קיים לפי משפט 5 אוטומורפיזם $\pi_2 \in Gal(K/\mathbb{Q}(\rho_3)) \le Gal(K/\mathbb{Q})$ כך ש $\pi_2(\sqrt[3]{2}) = \rho_3{}^2\sqrt[3]{2}$.

π_2 הוא מסדר 2 או 3 (הוא אינו יכול להיות טריויאלי), ובהכרח הוא שונה מ π_1 ולכן יחד עם π_1 הוא יוצר את כל S_3.

נראה את אחד האוטומורפיזמים במפורש (נשים לב ש $B = \{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2 = \sqrt[3]{4}, \rho_3, \rho_3\sqrt[3]{2}, \rho_3\sqrt[3]{4}\}$ הוא בסיס של K/F, מדוע? בנוסף מתקיים $\rho_3{}^2 = -1 - \rho_3$):

$$\pi_1(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}+d\rho_3+e\rho_3\sqrt[3]{2}+f\rho_3\sqrt[3]{4}) =$$
$$= a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}+d\rho_3^{\ 2}+e\rho_3^{\ 2}\sqrt[3]{2}+f\rho_3^{\ 2}\sqrt[3]{4} =$$
$$= a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}+d(-1-\rho_3)+e(-1-\rho_3)\sqrt[3]{2}+f(-1-\rho_3)\sqrt[3]{4} =$$
$$= (a-d)+(b-e)\sqrt[3]{2}+(c-f)\sqrt[3]{4}-d\rho_3-e\rho_3\sqrt[3]{2}-f\rho_3\sqrt[3]{4}$$

משפט (הסולם): אם מתקיים $F(a)\underset{\sigma}{\cong}F(b)$ **וגם** $F(a)\subseteq E, F(b)\subseteq K$ **שדות פיצול של** $m_a(x)=m_b(x)$
אזי ניתן "להרים" את האיזומורפיזם לאיזומורפיזם $E\underset{\tilde{\sigma}}{\cong}K$ כך ש $\tilde{\sigma}|_{F(a)}=\sigma$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr] \arrow[d, dash] & & K \arrow[d, dash] \\
F(a) \arrow[rr] \arrow[dr, dash] & & F(b) \arrow[dl, dash] \\
& F &
\end{tikzcd}$$

מסקנה: $Gal(E/F)$ פועלת טרנזיטיבית על שורשי פולינום אי-פריק $f(x)$ כאשר E שדה פיצול של $f(x)$ מעל F.

משפט: $|Gal(E/F)|\le[E:F]$ ויש שיוון אם E שדה פיצול של פולינום ספרבילי $f(x)\in F[x]$.