פתרון תרגיל 2 במרוכבות

1. נחשב את הנגזרת לפי ההגדרה

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{z+h}{(z+h)^2+1}-\frac{z}{z^2+1}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{(z^2+1)(z+h)-\left((z+h)^2+1\right)z}{\left((z+h)^2+1\right)(z^2+1)}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h-z^2h-h^2z}{\left((z+h)^2+1\right)(z^2+1)}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-z^2-hz}{\left((z+h)^2+1\right)(z^2+1)}\right)=\frac{1-z^2}{(z^2+1)^2}.$$

2. בכל אחד מהסעיפים נבדוק האם מתקיים תנאי קושי רימן ב- $z=0$. עבור <u>סעיף א</u>:

$$g(z)=|z|^2\Rightarrow u(x,y)=x^2+y^2, v(x,y)=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=0=\frac{\partial v}{\partial y}(0,0),\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=0=-\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$$

לכן g גזירה ב-$z=0$. עבור <u>סעיף ב</u>:

$$g(z)=\overline{z}-4z^3=x-iy-4(x+iy)^3=x-iy-4\left(x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3\right)=$$

$$x-4x^3+12xy^2+i\left(4y^3-y-12x^2y\right).$$

לכן נקבל ש-

$$u(x,y)=x-4x^3+12xy^2, v(x,y)=\left(4y^3-y-12x^2y\right)\Rightarrow$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=1\neq -1=\frac{\partial v}{\partial y}(0,0),\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=0=-\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$$

לכן תנאי קושי רימן הראשון לא מתקיים והפונקציה לא גזירה ב- $z=0$.

3. נניח ש- $f(z)=u(z)+iv(z)$ פונקציה אנליטית ומתקיים $u^2(z)=v(z)$ לכל z. ממשוואת קושי רימן הראשונה נקבל

$$(1)\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u^2}{\partial y}=2uu_y.$$

ממשוואת קושי רימן השניה נקבל

$$(2)\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u^2}{\partial x}=-2uu_x.$$

אם נכפיל את המשוואה הראשונה ב- u_x, את המשוואה השניה ב- u_y ונחבר נקבל

$$u_x^2+u_y^2=\left(2uu_y\right)u_x-\left(2uu_x\right)u_y=0$$

לכן $u_x=u_y=0$ ולכן u קבועה. ע"י שימוש נוסף במשוואות קושי רימן נקבל שהנגזרות של v מתאפסות ולכן גם הפונקציה v קבועה. לכן f קבועה.

4. א. נניח ש- $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ כלומר $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0$. נרשום את f בצורה $f=u+iv$ אז

$$0=\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=\left(u+iv\right)_x+i\left(u+iv\right)_y=u_x+iv_x+i\left(u_y+iv_y\right)=u_x-v_y+i\left(v_x+u_y\right).$$

לכן $u_x-v_y=0$ ו- $v_x+u_y=0$, כלומר $u_x=v_y$ ו- $v_x=-u_y$ ואלו בדיוק משוואות קושי רימן. כדי להוכיח את הכיוון ההפוך צריך להתחיל ממשוואות קושי רימן ואז בדיוק באותו אופן (בסדר הפוך) מוכיחים שהנגזרת של f לפי $\bar{z}$ שווה לאפס.

ב. נוכיח ש- $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}}=\frac{1}{4}\Delta f$, נתחיל מצד שמאל של המשוואה

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{i}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\frac{i}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{4}\Delta f.$$

5. א. נניח שקיימת פונקציה אנליטית f כך ש- $\mathrm{Re}\left(f\right)\left(x,y\right)=u(x,y)=x^2y$, ממשוואות קושי רימן נקבל

$$2xy=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ x^2=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

לכן ממשוואת קושי רימן הראשונה נקבל ש- $v = xy^2 + c_1(x)$ ומהמשוואה השניה $v = -\frac{1}{3}x^3 + c_2(y)$, לכן בהכרח

$$(1)\ xy^2 + c_1(x) = -\frac{1}{3}x^3 + c_2(y).$$

אם נציב $x = 0$ ו- y כלשהו במשוואה (1) נקבל

$$c_2(y) = c_1(0)$$

לכן $c_2 = c$ היא פונקציה קבועה. לכן נקבל

$$xy^2 = -\frac{1}{3}x^3 - c_1(x) + c.$$

כעת אם נציב $x = 1$ ו- y כלשהו נקבל

$$y^2 = -\frac{1}{3} - c_1(1) + c$$

כלומר קיבלנו ש- y^2 הוא מספר קבוע וזו סתירה. לכן לא קיימת פונקציה אנליטית המקיימת את הדרוש.

ב. הפונקציה $f(z) = z^3$ מקיימת $\mathrm{Re}(f) = x^3 - 3xy^2$.