תרגיל 9 – מתמטיקה לכימאים ג'

1. עבור המד"ר $(1-x)y''-2xy'-2y=0$ סביב הנקודה $x=-1$.

1.1. קבעו אם קיים למד"ר פתרון מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$. אם כן, המשיכו לסעיפים הבאים.

1.2. מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n.

1.3. בהינתן $y(-1)=\frac{1}{2}, y'(-1)=\frac{1}{4}$, מצאו $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

2. עבור כל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות

2.1. $y''+\frac{\sin 2x}{x^2}y'+\frac{e^x}{x^2}y=0$

2.2. $y''-\frac{1}{x}y'+\frac{e^x}{x^2}y=0$

2.3. $y''+y'+\frac{\cos x}{x^3}y=0$

קבעו אם מובטח קיום פתרון מהצורה $x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a_0 \neq 0)$ עבור $0<x<\delta$ לפי המשפט על סינגולריות רגולרית.

הערה: ניתן לחשוב על המד"ר הראשונה בתור המד"ר $x^2y''+\sin(2x)y'+e^xy=0$ שכבר הביאו אותה לצורה נוחה יותר ע"י חילוק במקדם של y''. בדומה, עבור המד"ר האחרות.

3. מצאו את ערכי r עבורם יש למד"ר $x^2y''+2(\sin x)y-3e^xy=0$ פתרון מהסוג $x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a_0 \neq 0)$ עבור $0<x<\delta$.

4. עבור המד"ר $x^2y''+3(e^x-1)y'-5e^{2x}y=0$

4.1. קבעו אם מובטח קיום פתרון מהצורה $x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a_0 \neq 0)$ עבור $0<x<\delta$ לפי המשפט על סינגולריות רגולרית.

4.2. מצאו את ערכי r עבורם יש למד"ר פתרון מהסוג $x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a_0 \neq 0)$ עבור $0<x<\delta$.

5. עבור המד"ר $4xy''+2y'+y=0$.

5.1 קבעו אם מובטח קיום פתרון מהצורה $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$ לפי המשפט על סינגולריות רגולרית. אם כן, המשיכו לסעיפים הבאים.

5.2 מצאו את ערכי r עבורם יש למד"ר פתרון מהסוג $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$.

5.3 לכל אחד מערכי r הנ"ל, מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n .

6. עבור המד"ר $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{16}\right)y=0$.

6.1 קבעו אם מובטח קיום פתרון מהצורה $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$ לפי המשפט על סינגולריות רגולרית. אם כן, המשיכו לסעיפים הבאים.

6.2 מצאו את ערכי r עבורם יש למד"ר פתרון מהסוג $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$.

6.3 לכל אחד מערכי r הנ"ל, מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n .
רמז: חשבו בנפרד את a_1 ואת נוסחת הנסיגה ל a_n לכל $n>1$.
(כשאתם מחשבים את הסכום $\sum_{k=0}^{n-1}a_k\left[(r+k)c_{n-k}+d_{n-k}\right]$, חשבו אותו בנפרד עבור $n=1$ ובנפרד עבור כל $n>1$).

בהצלחה! ☺