# תרגיל 9 בפונקציות מרוכבות

1. נניח כי הפונקציות $f(z), g(z), r(z), h(z)$ אנליטיות בסביבה מנוקבת של $z_0$. בנוסף נתון כי ב $z_0$ יש ל $f$ קוטב מסדר 2 ל $g$ יש אפס מסדר 3, ל $r(z)$ אפס מסדר 2 ול $h(z)$ אפס מסדר 1. מהו סוג הסינגולריות ב $z_0$ של:

(א) $\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}$

**פתרון:** לפי הנתונים

$$f(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{(z-z_0)^2} \quad g(x) = (z-z_0)^3\tilde{g}(z)$$

$$r(z) = (z-z_0)^2\tilde{r}(z) \quad h(z) = (z-z_0)\tilde{h}(z)$$

כאשר כל הטילדות אנליטיות ולא מתאפסות ב $z_0$. כעת,

$$\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)} = \frac{(z-z_0)\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)}{(z-z_0)^2\tilde{r}(z)+(z-z_0)\tilde{h}(z)} = \frac{\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)}{(z-z_0)\tilde{r}(z)+\tilde{h}(z)}$$

מה שנשאר אנליטי ב $z_0$ ולכן $z_0$ סינגולריות סליקה.

(ב) $\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}$

**פתרון:** עם אותם סימונים של הסעיף הקודם

$$\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)} = \frac{\frac{\tilde{f}(z)}{(z-z_0)^2}+(z-z_0)^3\tilde{g}(z)}{(z-z_0)^2\tilde{r}(z)+(z-z_0)\tilde{h}(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^3}\frac{\tilde{f}(z)+(z-z_0)^5\tilde{g}(z)}{(z-z_0)\tilde{r}(z)+\tilde{h}(z)}$$

הפונקציה $\frac{\tilde{f}(z)+(z-z_0)^5\tilde{g}(z)}{(z-z_0)\tilde{r}(z)+\tilde{h}(z)}$ אנליטית ב $z_0$ ולכן $z_0$ היא קוטב מסדר 3.

2. תהי $z_0$ נקודת סינגולריות עיקרית של $f(z)$. תהי $g(z)$ פונקציה שלמה ולא קבועה. הוכיחו כי $z_0$ היא גם סינגולריות עיקרית של ההרכבה $g \circ f$.

היות ש $g(z)$ אינה פונקציה קבועה, קיימים $a, b$ כך ש

$$g(a) \neq g(b)$$

היות ש $z_0$ נקודת סינגולריות עיקרית של $f$, קיימות סדרות $a_n, b_n$ המתכנסות ל $z_0$ כך ש

$$f(a_n) \to a$$

$$f(b_n) \to b$$

היות ש $g$ אנליטית ולכן רציפה, יתקיים כי

$$gf(a_n) \to g(a)$$

$$gf(b_n) \to g(b)$$

כאמור $g(a) \neq g(b)$ ולכן הגבול

$$\lim_{z \to z_0} g(f(z))$$

לא קיים, כלומר $z_0$היא נקודת סינגולריות עיקרית של ההרכבה.

3. תהי $z_0$ סינגולריות עיקרית של $f(z)$. הוכיחו כי לכל $N$ טבעי ולכל $M$ ממשי קיימת סדרה $z_n \to z_0$ כך ש

$$|(z_n - z_0)^N f(z_n)| \geq M$$

לכל $n \in \mathbb{N}$.
יהי $N$ טבעי ו $M$ ממשי. נגדיר $g(z) = (z - z_0)^N f(z)$. נניח כי יש סביבה $U$ מנוקבת של $z_0$ שבה

$$|g(z)| < M$$

אז $g(z)$ בעלת סינגולריות סליקה ב $z_0$ ובהתאמה $f(z)$ בעלת קוטב (מסדר לכל היותר $N$) ב $z_0$. זאת בסתירה לכך ש $z_0$ היא סינגולריות עיקרית של $f$. לכן אין סביבה מנוקבת של $z_0$ שבה מתקיים

$$|g(z)| < M$$

לכן אפשר לייצר סדרה $z_n \to z_0$ שעבורה

$$|g(z_n)| \geq M$$

(בדרך הרגילה, בכדור ברדיוס $1$ יש נקודה כנ"ל - מסמנים אותה $z_1$. באופן כללי בכדור ברדיוס $\frac{1}{k}$ יש נקודה כנ"ל, מסמנים אותה $z_k$ וכו')