1) הוכיחו: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ מתכנס בהחלט.

הוכחה:

ידוע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור חיובי המקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\frac{1}{n^2}} = 0$ אז ממבחן

ההשוואה הגבולי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ יתכנס. כעת, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ולכן $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

עבור $b_n = \frac{|a_n|}{n^2}$ נקבל ש $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ ומכאן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^2}$ מתכנס כלומר

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ מתכנס בהחלט.

2) תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית יורדת ונניח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. הוכיחו ש $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

(רמז: התבוננו ב $S_{2n} - S_n$ וב- $S_{2n+1} - S_n$. אפשרות אחרת: דרך מבחן העיבוי).

הוכחה:

דרך ראשונה- מכיון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז מתקיים בפרט

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - S_n = 0$. נשים לב שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה

מונוטונית יורדת מצד אחד ומצד שני הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ כלומר מדובר

בסדרה מונוטונית יורדת של אישליליים המתכנסת לאפס.

לכן מתקיים $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} \geq na_{2n} \geq 0$ וממשפט הסנדביץ' נסיק ש $\lim_{n\to\infty} na_{2n} = 0$

ולכן גם $\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} na_{2n} = 0$. באופן דומה

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} - S_n = 0$ ומתקיים

$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1} \geq (n+1)a_{2n+1} \geq 0$ ולכן ניתן להסיק ממשפט הסנדביץ' ש

$\lim_{n\to\infty} (n+1)a_{2n+1} = 0$. מכיון שגם $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$ (למה?) נקבל ש

$$\lim_{n\to\infty} (2n+1)a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (2n+2)a_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 2\lim_{n\to\infty} (n+1) - \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 2\cdot 0 - 0 = 0$$

כעת, עפ"י טענה מהתרגול סדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L אם ורק אם

$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = L$. לכן, הצבה $b_n = na_n$ מסיימת את ההוכחה.

דרך שניה- מתקיימים תנאי מבחן העיבוי ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ מתכנס. בפרט

$\lim_{n\to\infty} 2^n a_{2^n} = 0$. לכל $2 \leq k \in \mathbb{N}$ קיים **יחיד** $n_k \in \mathbb{N}$ כך ש $2^{n_k} \leq k < 2^{n_k+1}$. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

סדרה מונוטונית יורדת ולכן יתקיים לכל $2 \leq k \in \mathbb{N}$ $a_{2^{n_k}} \geq a_k > a_{2^{n_k+1}}$ ובסה"כ

$2^{n_k} a_{2^{n_k+1}} < ka_k < 2^{n_k+1} a_{2^{n_k}} \; (*)$.

אנו טוענים ש $\lim_{k\to\infty} 2^{n_k} a_{2^{n_k+1}} = \lim_{k\to\infty} 2^{n_k+1} a_{2^{n_k}} = 0$ ואז מ $(*)$ וממשפט הסנדביץ' נקבל הדרוש.

כדי להוכיח את הטענה האחרונה ניעזר בטענת העזר הבאה .

<u>טענת עזר:</u>

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ במובן הרחב. תהי $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה עולה של טבעיים שאינה בהכרח עולה ממש .בנוסף נניח שכל איבר n_k מופיע לכל היותר מספר סופי של פעמים. אזי הסדרה $b_k = a_{n_k}$ מקיימת $\lim_{k\to\infty} b_k = L$.

הערה: הטענה הזו מכלילה את המשפט שאם סדרה מתכנסת במובן הרחב אז כל תת סדרה שלה תתכנס לאתו הגבול. לצורך התרגיל נקרא לסדרות $\{b_k\}$ כאלה "תת סדרות מוכללות" של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

הוכחת טענת העזר:

יהי $\varepsilon > 0$**.** אזי קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$. מהגדרת הסדרה $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ בהכרח קיים $k_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $n_{k_0} \ge n_0$ (למה?). כעת, לכל $k \ge k_0$ מתקיים $n_k \ge n_{k_0} \ge n_0$ ולכן $|b_k - a| = |a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

מש"ל טענת עזר

נחזור להוכחת הטענה שנשארה לנו.

$\lim_{k\to\infty} 2^{n_k} a_{2^{n_k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{n_k+1} a_{2^{n_k+1}}}{2} = \frac{0}{2} = 0$. כדי לראות ש $\lim_{k\to\infty} 2^{n_k+1} a_{2^{n_k+1}} = 0$ נשים לב ש $\left\{2^{n_k+1} a_{2^{n_k+1}}\right\}_{k=2}^{\infty}$ "תת סדרה מוכללת" של $\left\{2^{n+1} a_{2^{n+1}}\right\}_{n=2}^{\infty}$ ומכיון שהאחרונה מתכנסת לאפס אז גם הראשונה. בצורה דומה מראים ש $\lim_{k\to\infty} 2^{n_k+1} a_{2^{n_k}} = 2\lim_{k\to\infty} 2^{n_k} a_{2^{n_k}} = 0$.