

טריגונומטריה - חישובים במרחב

שיעור מס. 1

udiomer@netvision.net.il

תפריט

סוגי גופים במרחב

משפטים

הגדרות

מנסרה ישרה

המישור

תיבה

ישר ומישור

מנסרה משולשת

שני מישורים

פירמידה ישרה

משופעים והיטלים

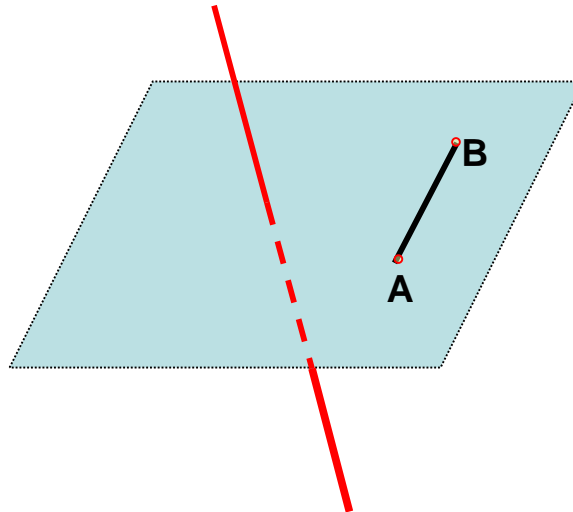
הגדרות

מישור

הגדרת המישור

המישור הוא חלק מהמרחב. המישור מוגדר בעזרת תכונותיו:

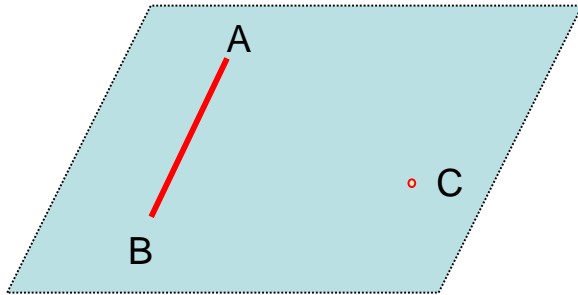
1. כל ישר המחבר שתי נקודות הנמצאות במישור, נמצא כולו בתוך המישור
2. המישור איננו מוגבל
3. המישור מחלק את המרחב לשני חלקים, כך שלא ניתן לעבור מחלק אחד לחלק שני מבלי לחתוך את המישור



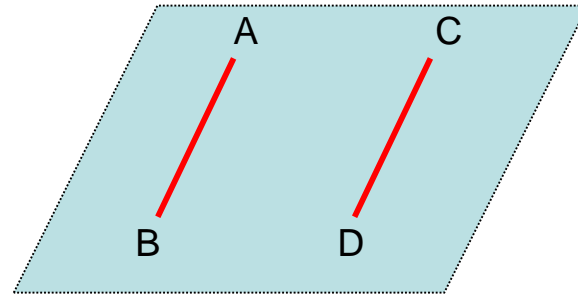
קביעת המישור

המישור נקבע באופן חד-ערכי בעזרת אחת מהדרכים הבאות:

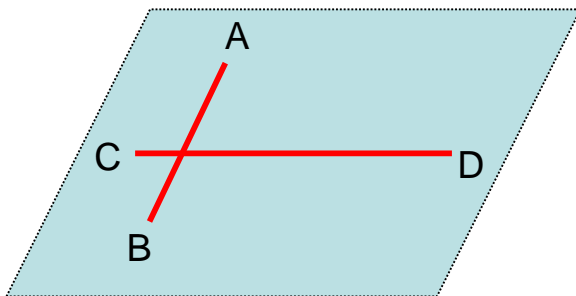
ישר ונקודה מחוץ לו



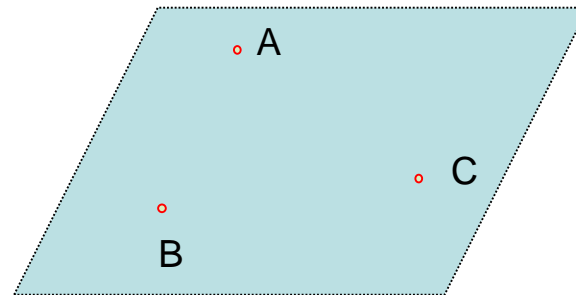
שני ישרים מקבילים



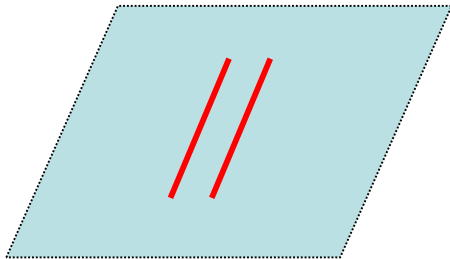
שני ישרים נחתכים



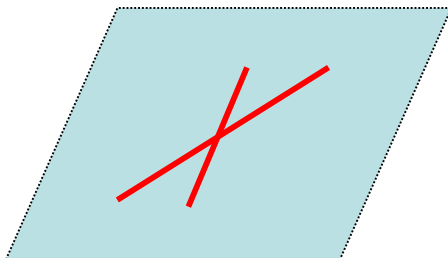
שלוש נקודות שאינן על ישר אחד



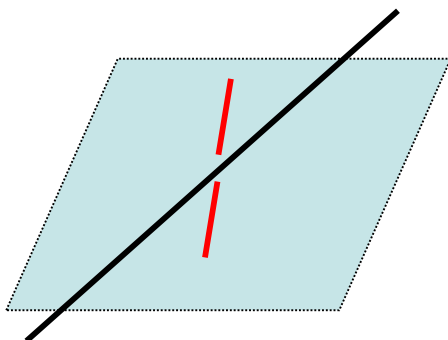
המצב ההדדי של שני ישרים



1. **מקבילים** – שני ישרים שאינם חוצים זה את זה ואשר נמצאים במישור אחד



2. **נחתכים** – שני ישרים שחותכים זה את זה ואשר נמצאים במישור אחד

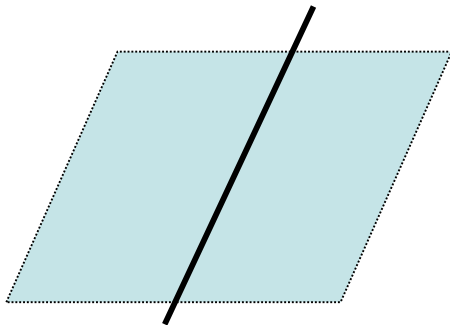


3. **מצטלבים** – שני ישרים שנמצאים על מישורים מקבילים, אך הישרים עצמם אינם מקבילים זה לזה.

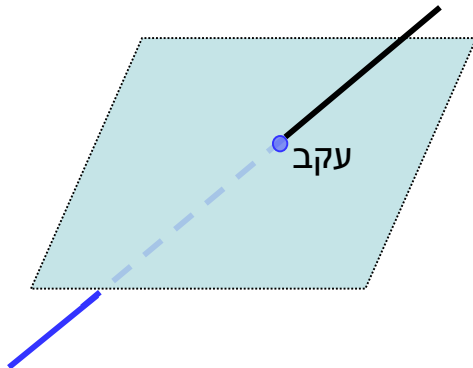
המצב ההדדי של ישר ומישור

האפשרויות היחידות למצב ההדדי בין ישר למישור הן:

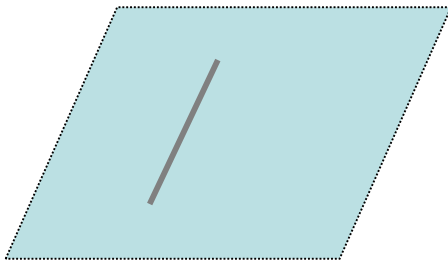
1. **ישר מקביל למישור – לישר ולמישור אין אף נקודה משותפת**



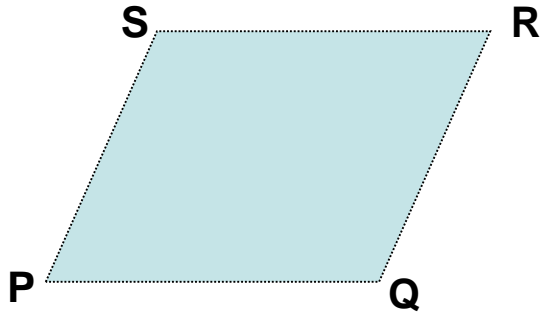
2. **ישר החותך את המישור – לישר ולמישור נקודה משותפת אחת, הקרויה עקב הישר על המישור**



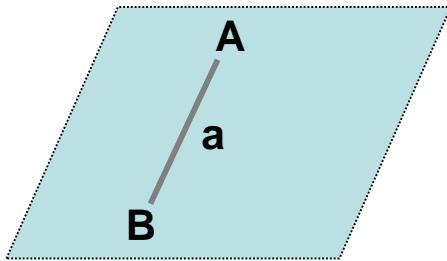
3. **הישר שייך למישור – כל נקודות הישר נמצאות על המישור**



סימון מישורים



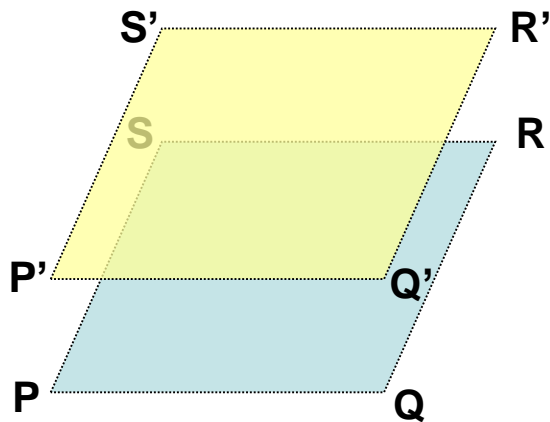
1. בדומה לאותיות, מישורים מסומנים ע"י אותיות לטיניות גדולות. (בדר"כ ע"י אותיות "מרוחקות" יותר ב-ABC)



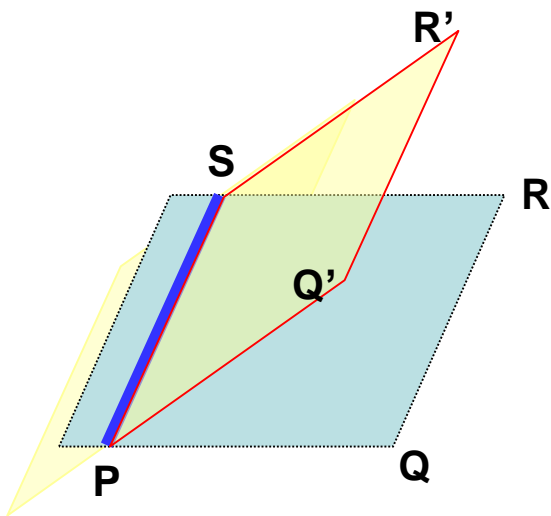
2. ישרים מסומנים ע"י צמד אותיות או ע"י אות לטינית קטנה



המצב ההדדי של שני מישורים



1. מישורים מקבילים – לשני המישורים אין אף נקודה משותפת



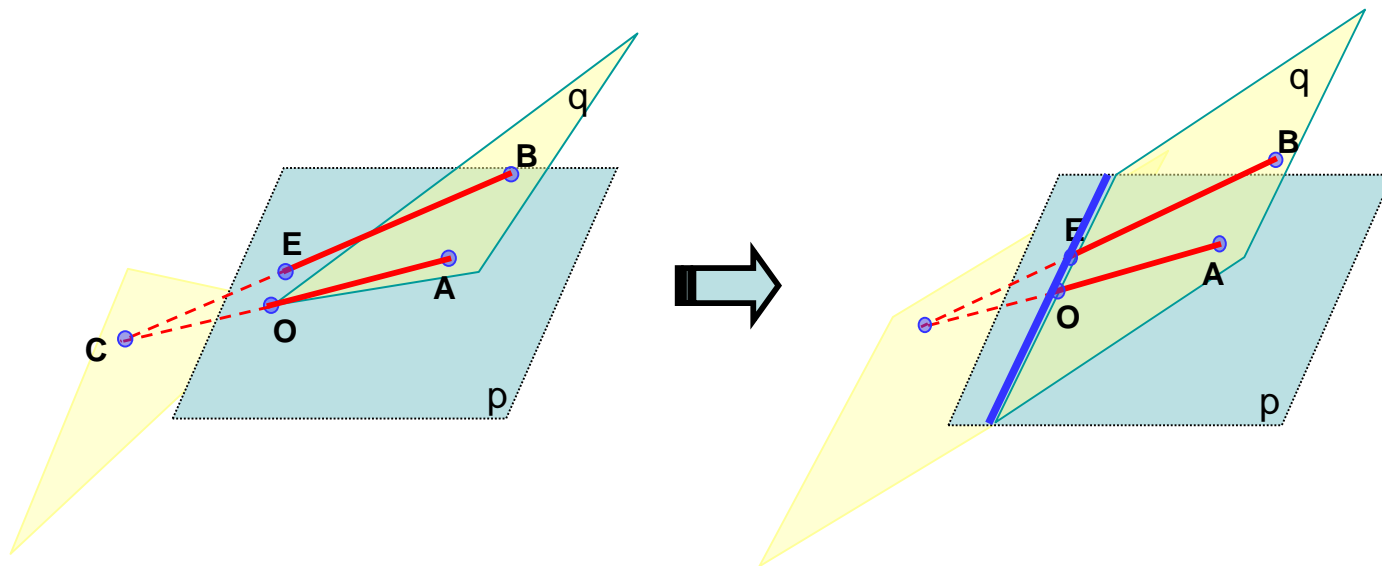
2. מישורים נחתכים – לשני המישורים ישר משותף, הנקרא **ישר החיתוך** של המישורים.



משפטים

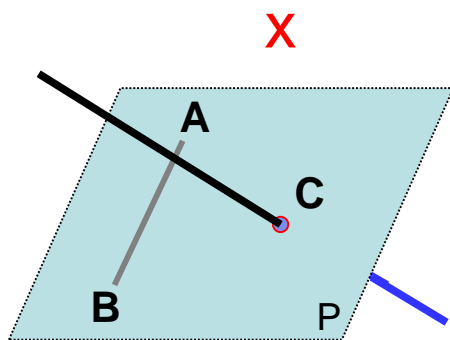
המצב ההדדי של שני מישורים – משפט 1

אם לשני מישורים יש נקודה משותפת, אזי יש להם ישר משותף.

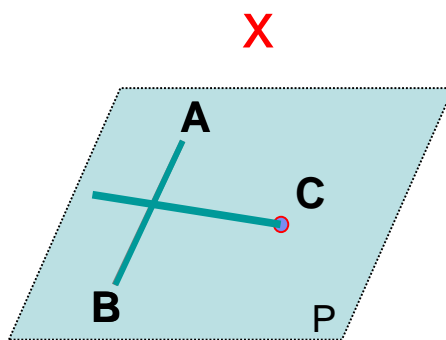


מקבילים במרחב – משפט 2

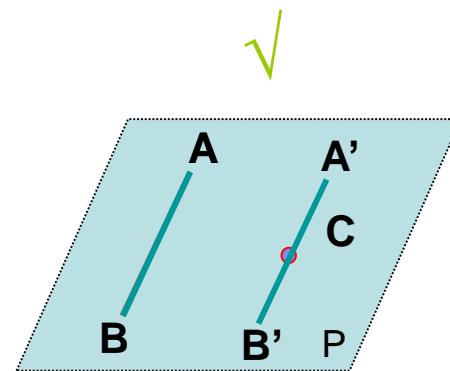
דרך כל נקודה שמחוץ לישר נתון, אפשר להעביר רק ישר מקביל אחד לישר הנתון.



מצטלב



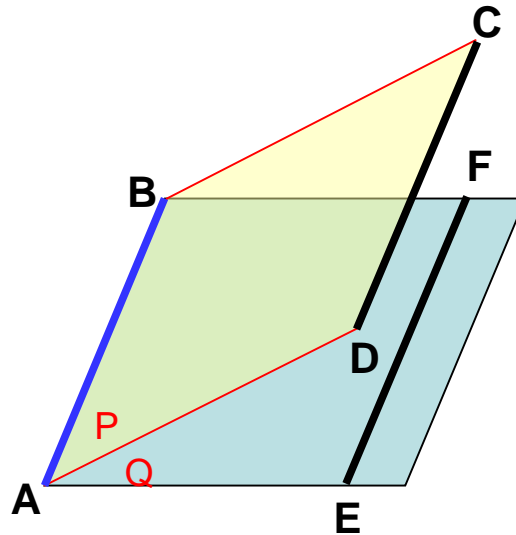
חותך



מקביל

מקבילים במרחב - משפט 3

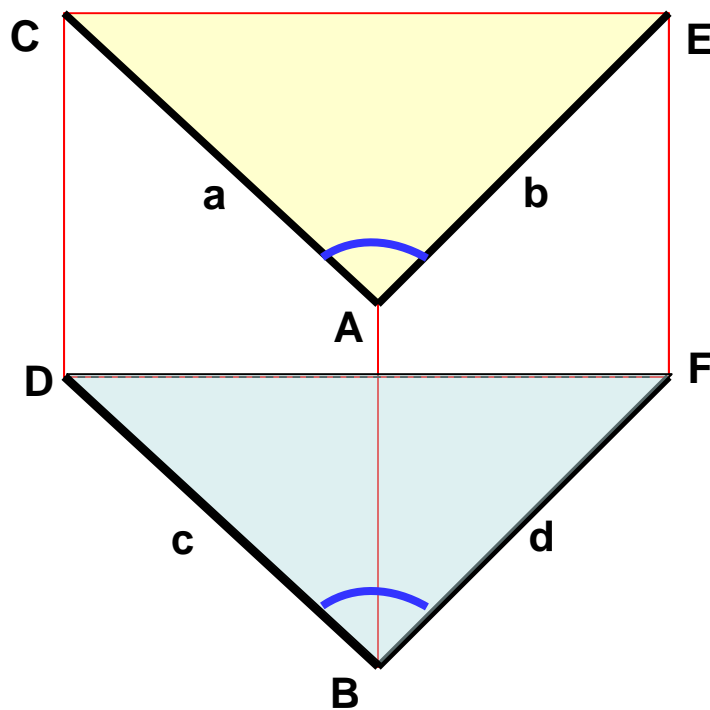
שני ישרים המקבילים כל אחד לישר שלישי, מקבילים זה לזה.



אם $AB \parallel CD$ וגם $AB \parallel EF$
אזי: $CD \parallel EF$

***משפט 4: מקבילים במרחב

שתי זוויות במרחב ששוקיהן מקבילות בהתאמה, שוות זו לזו או משלימות זו את זו ל- 180°



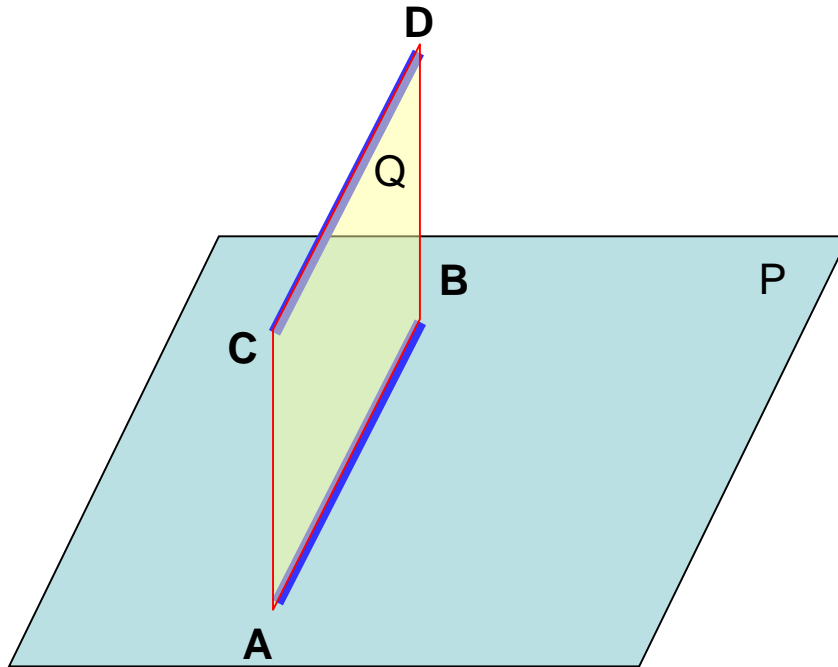
אם $a \parallel c$ וגם $b \parallel d$

אזי: $\angle A = \angle B$

ישר ומישור

משפט 5

אם ישר שאינו שייך למישור מקביל לאחד הישרים במישור, אזי הישר מקביל למישור



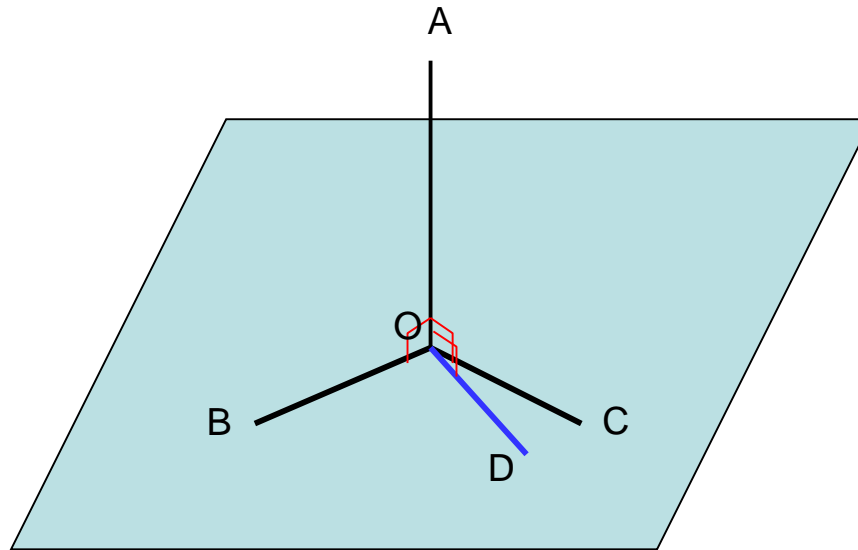
נתון: AB במישור ρ

אם $CD \parallel AB$

אזי: $CD \parallel \rho$

***משפט 6

ישר מחוץ למישור, המאונך לשני ישרים במישור העוברים דרך עקבו, מאונך לכל הישרים העוברים דרך עקבו.



:אם

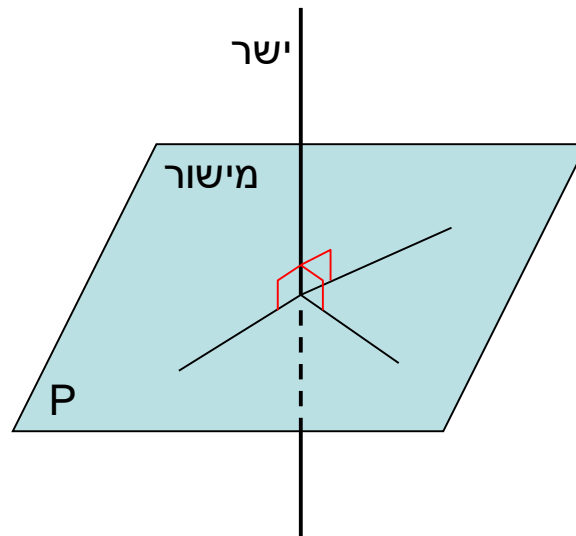
$AO \perp OC, AO \perp OB$

:אז

$AO \perp OD$

הגדרה: ישר מאונך (ניצב) למישור

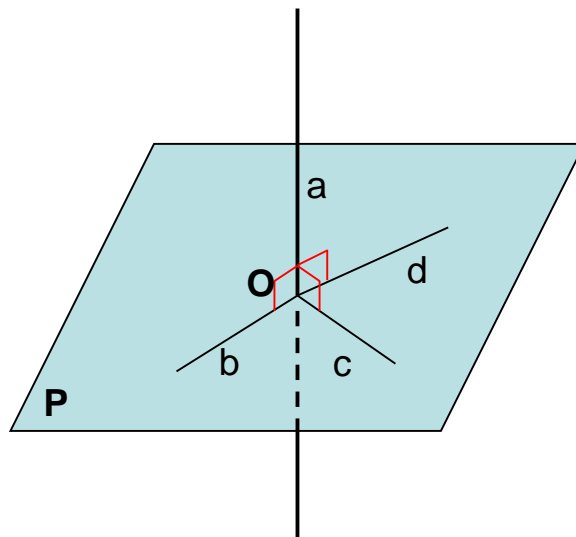
ישר, החותך את המישור, ומאונך לכל ישר במישור העובר דרך עקבו, נקרא **ישר מאונך (ניצב) למישור**



תנאי הכרחי ומספיק לישר מאונך למישור - הישר מאונך לשני ישרים במישור העוברים דרך עקבו (משפט 6)

משפט 7***

כל האנכים לישר באחת מנקודותיו נמצאים במישור אחד.



אם :

$$a \perp d, a \perp c, a \perp b$$

a, b, c, d נחתכים בנקודה O .

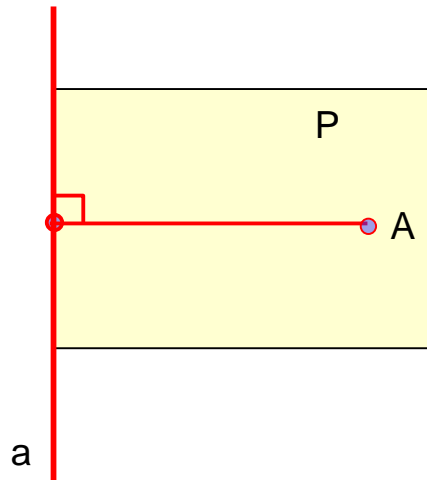
אז :

b, c, d נמצאים במישור אחד

מסקנה: דרך כל נקודה שעל קו ישר, אפשר להעביר רק מישור אחד המאונך לישר

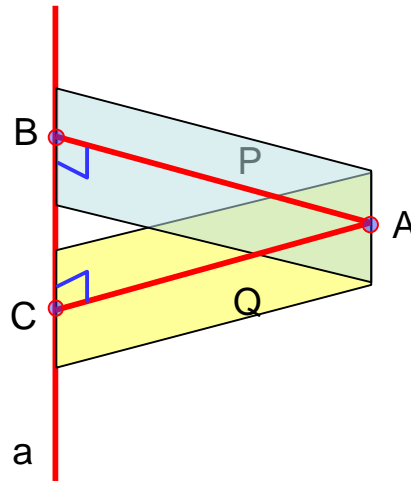
משפט 8

דרך כל נקודה שמחוץ לישר, אפשר להעביר רק מישור אחד המאונך לישר.



משפט 8 - הוכחה

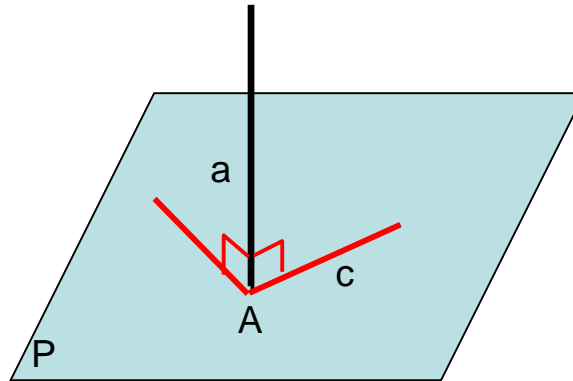
דרך כל נקודה שמחוץ לישר, אפשר להעביר רק מישור אחד המאונך לישר.



נניח שאפשר להעביר שני מישורים מאונכים לישר. נקבל ש- $a \perp AB$ ו- $a \perp AC$ ומכאן תתקבל סתירה עקב שתי זוויות ישרות במשולש ABC .

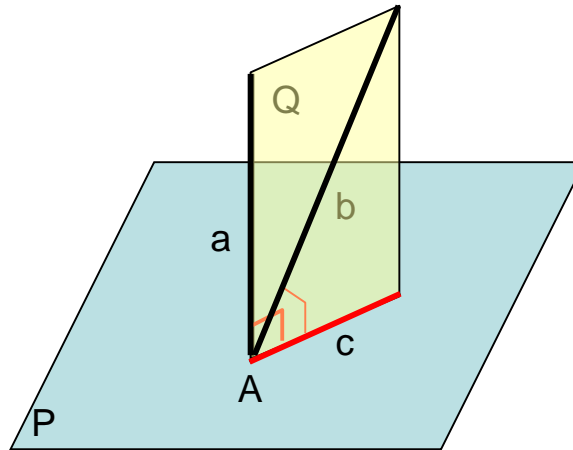
משפט 9

בכל נקודה במישור, אפשר להעלות רק אנך אחד למישור זה.



משפט 9 - הוכחה

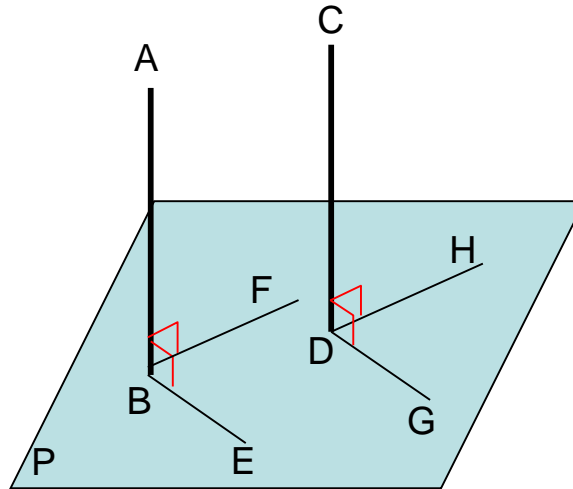
בכל נקודה במישור, אפשר להעלות רק אנך אחד למישור זה.



נניח ש- a ו- b מאונכים למישור P בנקודה A . מתקבל ש- a ו- b מאונכים לישר c בסתירה למשפט בהנדסת המישור שאומר שבכל נקודה על הישר ניתן להעלות רק אנך אחד.

*** משפט 10

אם אחד משני ישרים מקבילים מאונך למישור, גם הישר השני מאונך למישור זה.

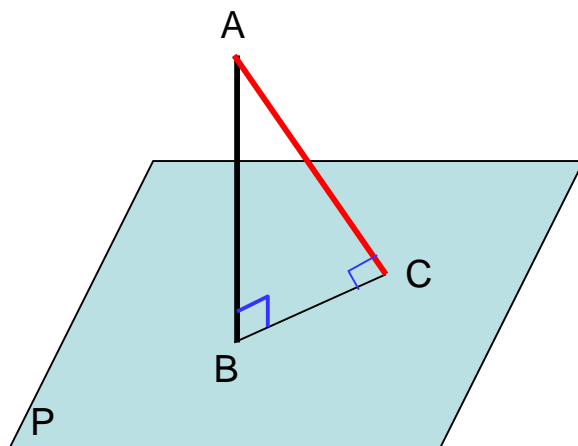


כלומר, אם $AB \perp P$ ו- $AB \parallel CD$ אזי $CD \perp P$.

(הוכחה עפ"י משפט 4 – זוויות במרחב ששוקיהן מקבילות בהתאמה שוות או משלימות ל-180)

משפט 11

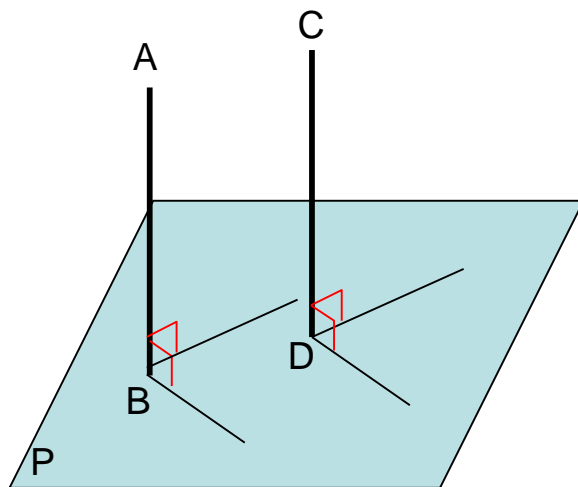
דרך כל נקודה שמחוץ למישור, אפשר להעביר רק אנך אחד למישור.



בדרך השלילה מתקבלת סתירה. כלומר, אם $AB \perp P$ ו- $AC \perp P$ אזי במשולש ABC שתי זוויות ישרות.

*** משפט 12

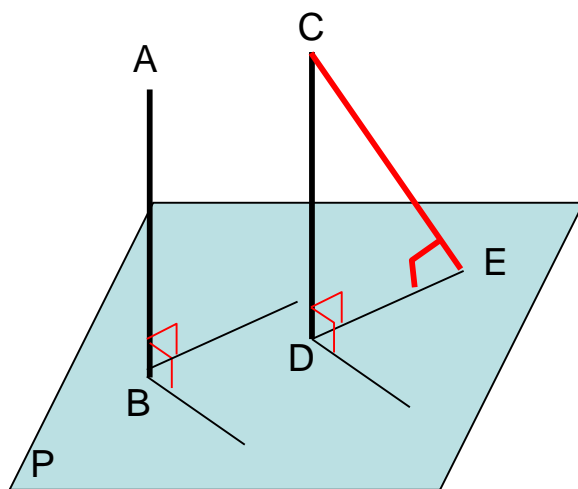
שני ישרים המאונכים למישור אחד, מקבילים זה לזה.



כלומר, אם $AB \perp \rho$ ו- $CD \perp \rho$ אזי $AB \parallel CD$.

*** משפט 12 - הוכחה

שני ישרים המאונכים למישור אחד, מקבילים זה לזה.



הוכחה על דרך השלילה. נניח ש- CD אינו מקביל ל- AB .
בניית עזר: $CE \parallel AB$. עפ"י משפט 10 $CE \perp p$.
מתקבל משולש CDE בעל שתי זוויות ישרות – סתירה.

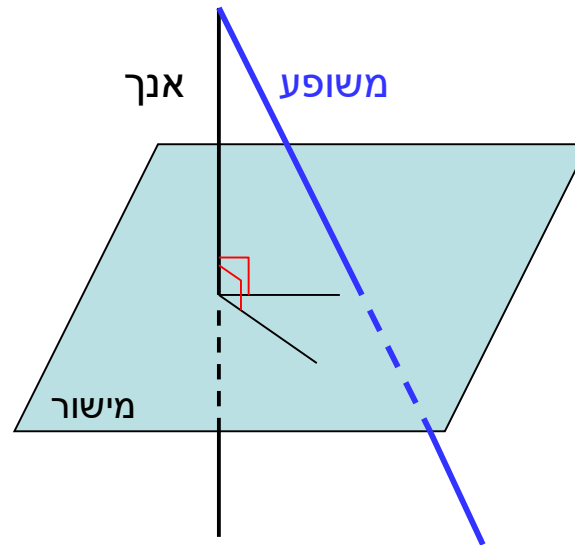


משופעים והיטלים

משופע למישור

הגדרה:

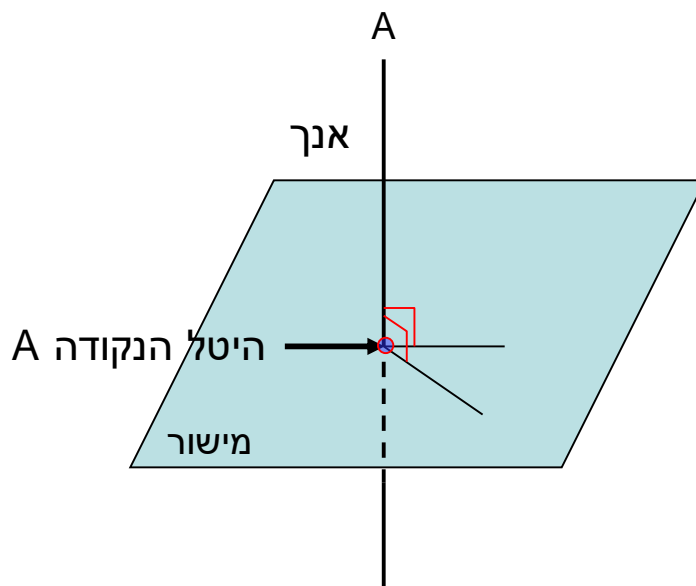
משופע למישור - ישר החותך מישור ואינו מאונך לו.



היטל של נקודה על המישור

הגדרה:

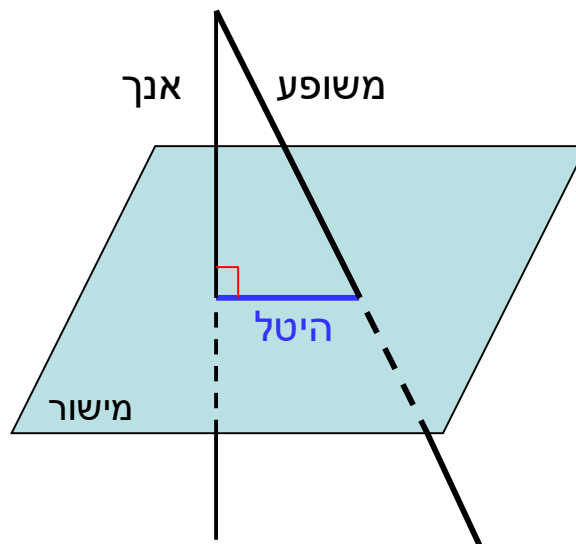
היטל של נקודה על המישור - נקודת החיתוך (העקב) של האנך היורד מן הנקודה הנתונה אל המישור.



היטל הישר על המישור

הגדרה:

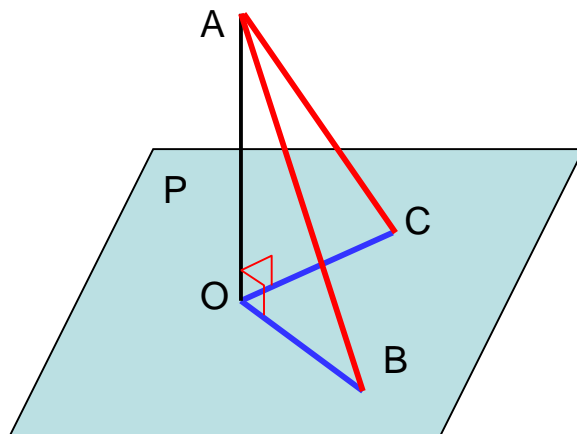
היטל של ישר על המישור – האוסף כל ההיטלים של נקודות הישר על המישור



היטל הישר על המישור מתקבל ע"י הורדת אנך למישור מקצה המשופע וחיבור עקב המשופע עם עקב האנך.

משפט 13

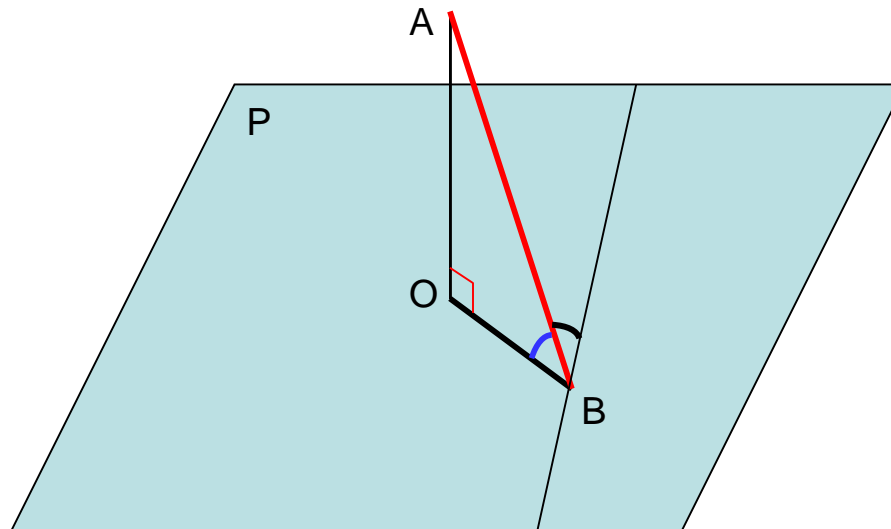
לשני משופעים שווים, היוצאים מנקודה אחת, יש היטלים שווים, ולהיפך, אם ההיטלים שווים, המשופעים שווים.



כלומר, אם $AB=AC$, אזי $OB=OC$ (עפ"י צ,צ,זווית מול הצלע הגדולה)
ולהיפך, אם $OB=OC$, אזי $AB=AC$ (עפ"י צ.ז.צ.)

*** משפט 14

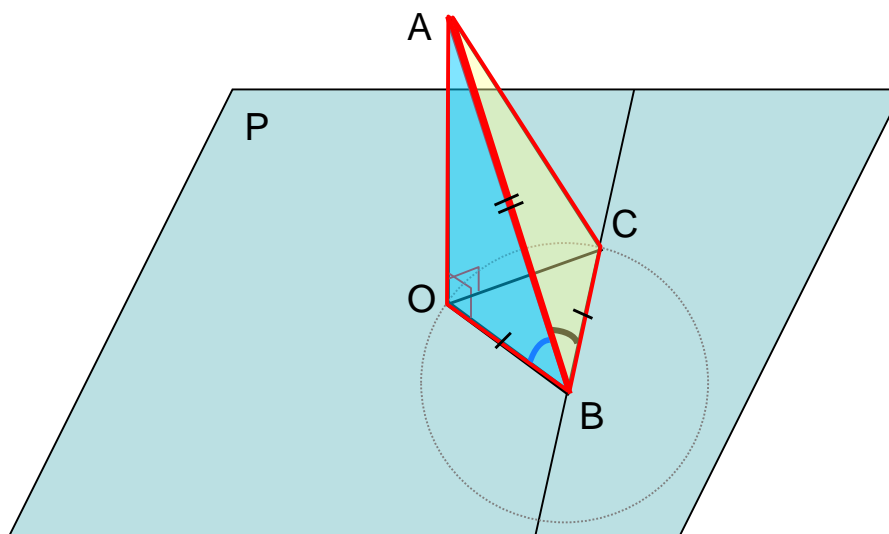
הזווית שבין משופע לבין היטלו על המישור, קטנה מכל זווית אחרת שיוצר המשופע עם ישרים במישור העוברים דרך עקבו.



כלומר, אם AB משופע למישור, ו- BO הוא היטלו על המישור, אזי $\angle ABO$ קטנה מכל הזוויות האחרות הנוצרות בין AB לבין ישרים במישור העוברים דרך הנקודה B .

*** משפט 14 - הוכחה

הזווית שבין משופע לבין היטלו על המישור, קטנה מכל זווית אחרת שיוצר המשופע עם ישרים במישור העוברים דרך עקבו.



$$BC = BO$$

$$AB = AB$$

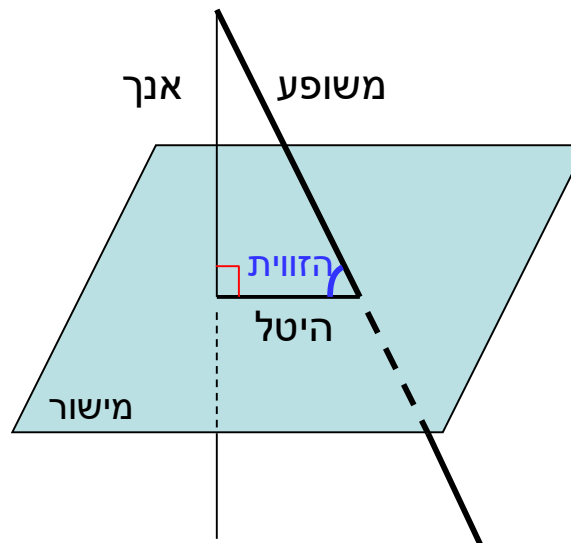
$$AC > AO$$

$$\angle ABC > \angle ABO$$

זווית בין ישר (משופע) למישור

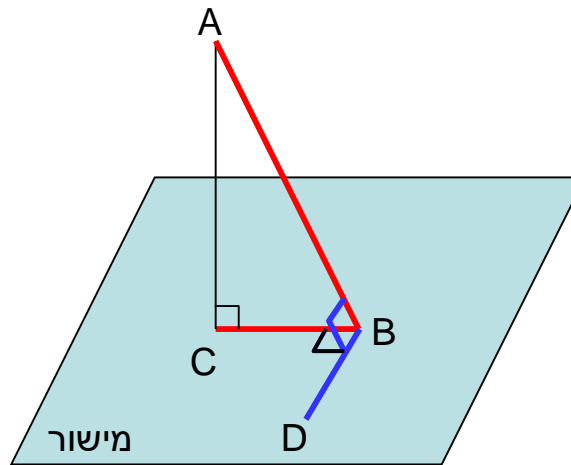
הגדרה:

הזווית (החדה) שבין ישר המשופע למישור, לבין היטלו במישור, נקראת הזווית בין הישר (משופע) למישור.



*** משפט 15 - שלושת האנכים (הניצבים)

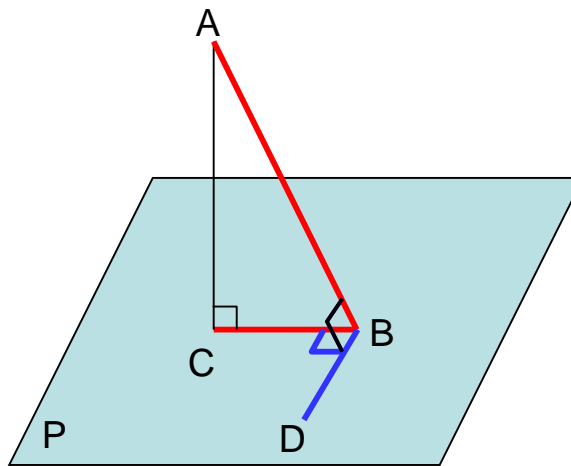
ישר העובר במישור דרך עקבו של משופע ומאונך להיטלו של המשופע במישור זה – מאונך גם למשופע.



כלומר, אם CB הוא היטל AB על המישור ו- $DB \perp CB$, אז $DB \perp AB$

*** המשפט ההפוך

ישר העובר במישור דרך עקבו של משופע ומאונך למשופע – מאונך גם להיטלו של המשופע במישור.



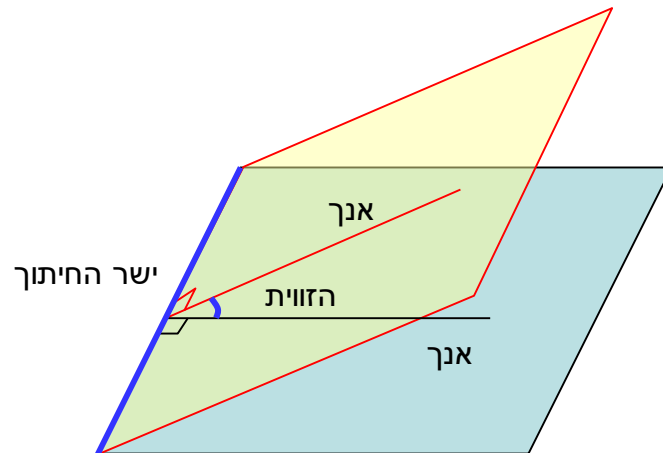
כלומר, אם CB הוא היטל AB על המישור ו- $DB \perp AB$, אז $DB \perp CB$



זווית בין שני מישורים

הגדרה:

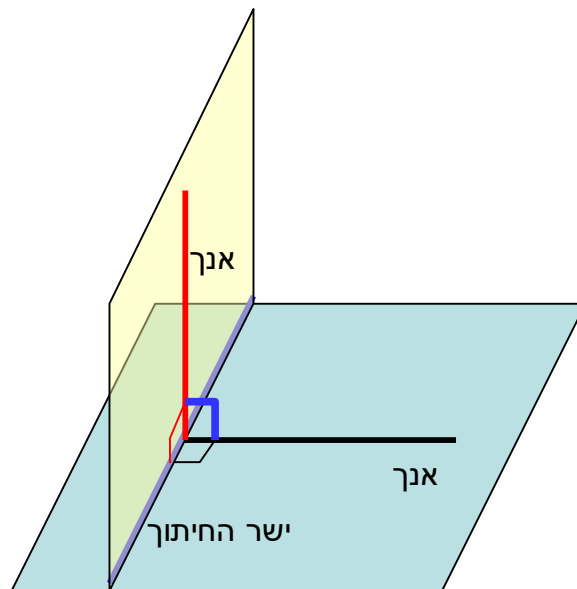
הזווית שבין שני אנכים לישר החיתוך המשותף של המישורים (היוצאים מנקודה משותפת על ישר החיתוך, אחד בכל מישור) נקראת הזווית שבין שני המישורים.



מישורים ניצבים

הגדרה:

אם הזווית בין שני המישורים היא זווית ישרה, המישורים נקראים **מישורים ניצבים זה לזה**.

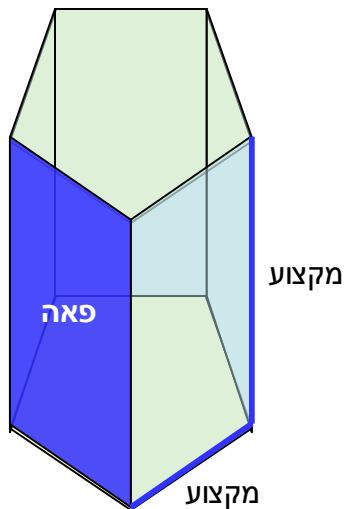


סוגי גופים במרחב

גופים במרחב - הגדרות

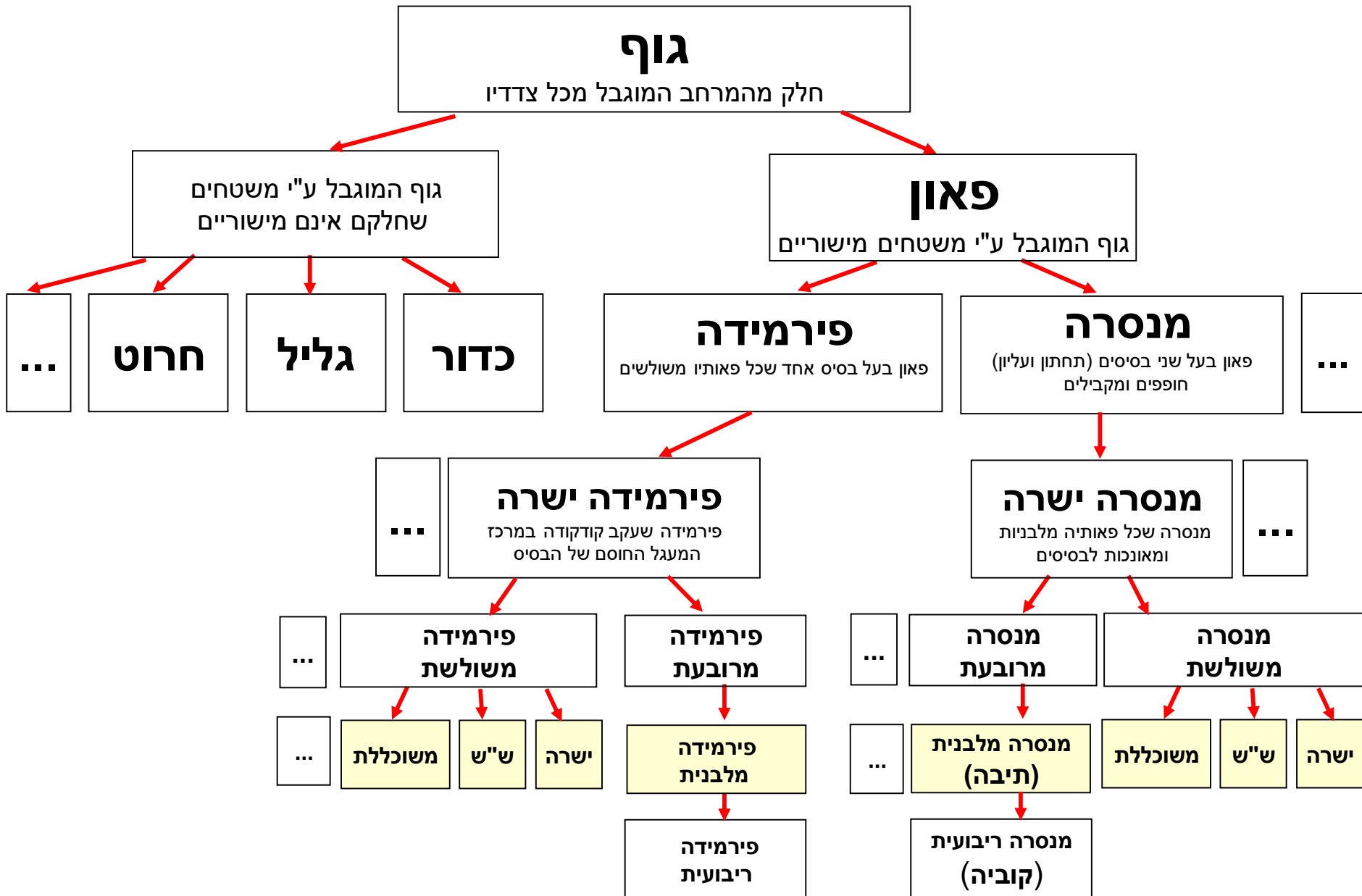
- גוף – חלק מהמרחב המוגבל מכל צדדיו

- פאון - גוף החסום ע"י רק על ידי משטחים מישוריים



- פאה – כל אחד מהמצולעים המגבילים את הפאון

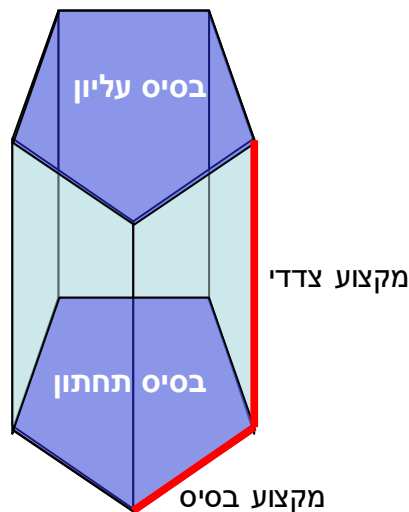
- מקצוע – ישר החיתוך של שתי פאות



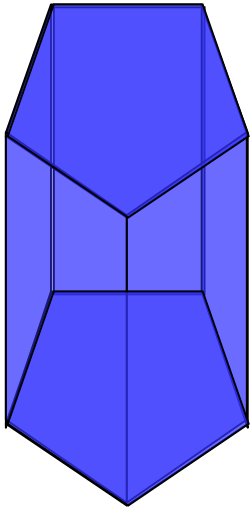
מנסרה ישרה

הגדרה:

פאון החסום על ידי שני מצולעים חופפים ומקבילים ועל ידי מספר מלבנים המאונכים למצולעים והעוברים דרך צלעות המצולעים



מנסרה ישרה



$$V = S \cdot h$$

- המקצועות הצדדיים ניצבים לבסיסים
- אנך לבסיס המנסרה נקרא גובה המנסרה
- גובה המנסרה שווה לאורך המקצוע הצדדי
- כל פאות המנסרה יחד נקראות מעטפת המנסרה – סכום שטחיהן נקרא שטח מעטפת המנסרה
- המעטפת ושני הבסיסים נקראים פני המנסרה – סכום שטחיהם נקרא שטח הפנים של מנסרה
- נפח המנסרה שווה למכפלת שטח הבסיס בגובה המנסרה

מנסרה משוכללת

הגדרה:

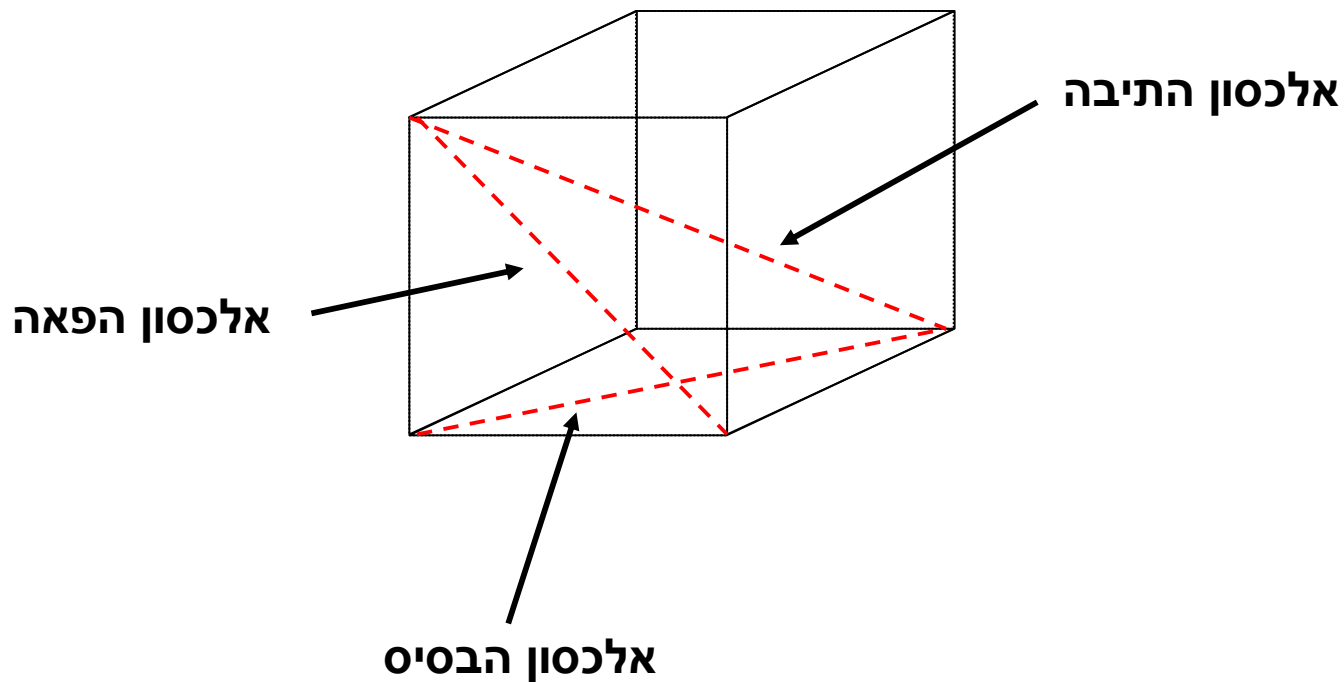
מנסרה שבסיסה הוא מצולע משוכלל נקראת
מנסרה משוכללת

כל הפאות הצדדיות של מנסרה משוכללת הן מלבנים חופפים



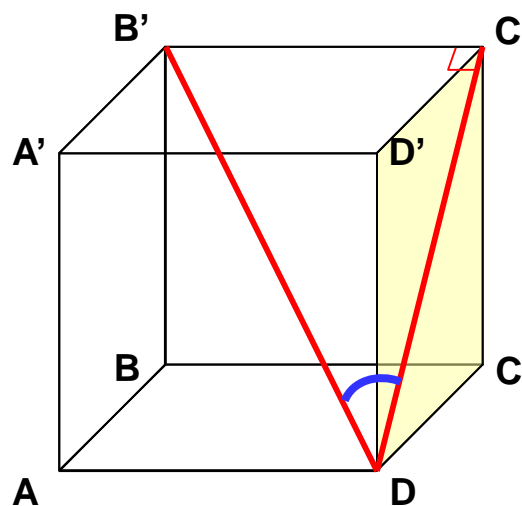
תיבה

תיבה – מנסרה ישרה שבסיסה מלבן



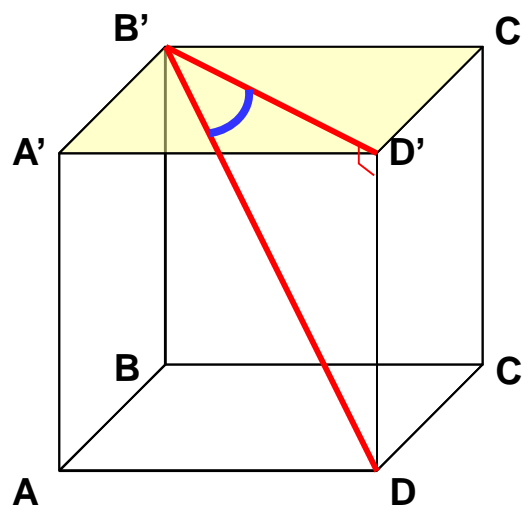
סוגי זוויות בתיבה

זווית בין אלכסון התיבה לפאה



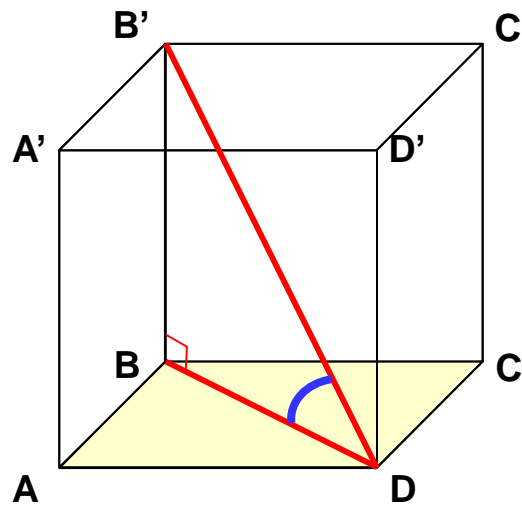
הזווית בין אלכסון $B'D$ לפאה $DD'C'C$

זווית בין אלכסון התיבה לבסיס העליון



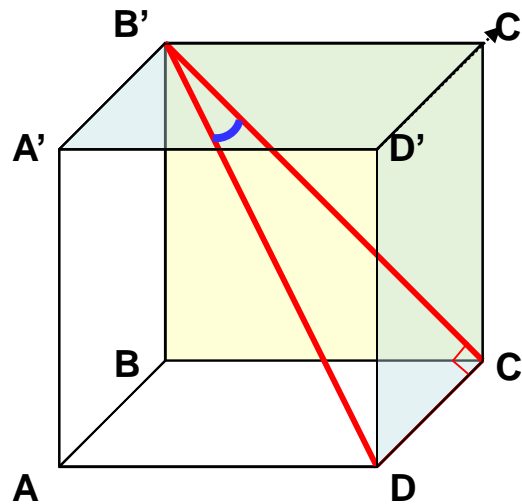
הזווית בין אלכסון $B'D$ לבסיס העליון $A'B'C'D'$

זווית בין אלכסון התיבה לבסיס התחתון



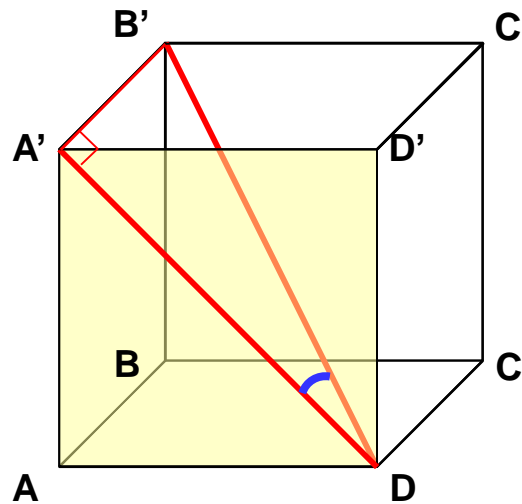
הזווית בין אלכסון $B'D$ לבסיס התחתון $ABCD$

זווית בין אלכסון התיבה לפאה האחורית



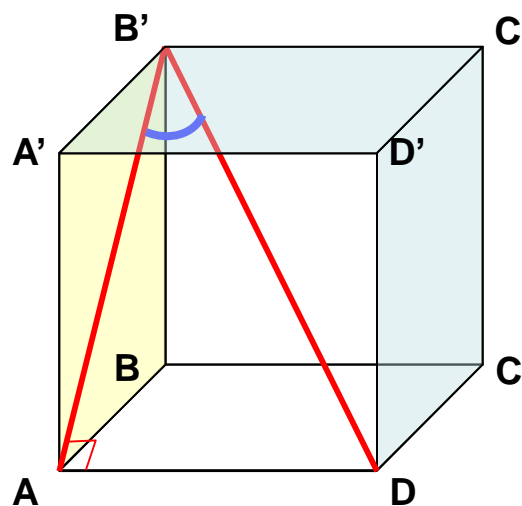
הזווית בין אלכסון $B'D$ לפאה $BB'C'C$

זווית בין אלכסון התיבה לפאה הקדמית



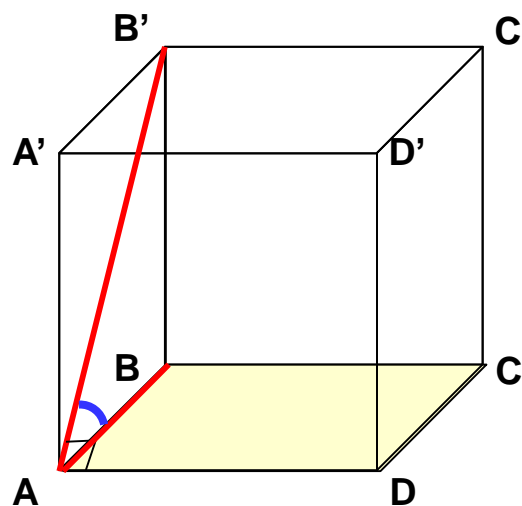
הזווית בין אלכסון $B'D$ לפאה $AA'D'D$

זווית בין אלכסון התיבה לפאה צדדית



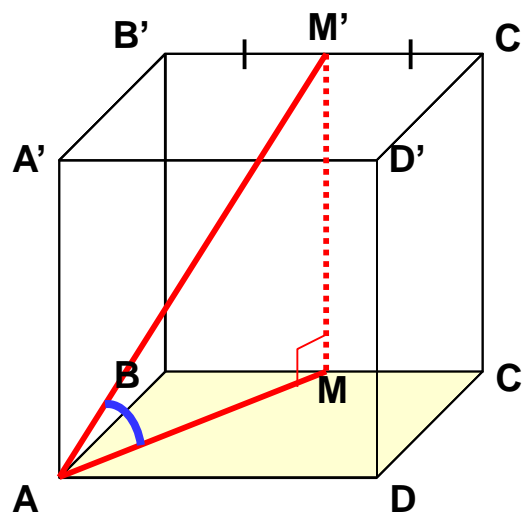
הזווית בין אלכסון $B'D$ לפאה $AA'B'B$

זווית בין אלכסון הפאה לבסיס



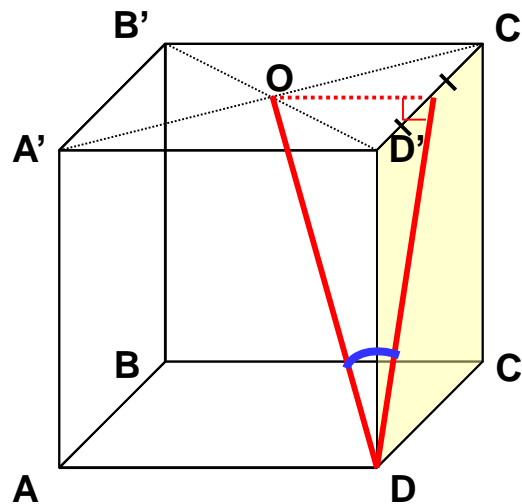
הזווית בין אלכסון הפאה $B'A$ לבסיס התחתון $ABCD$

זווית בין אלכסון לבסיס



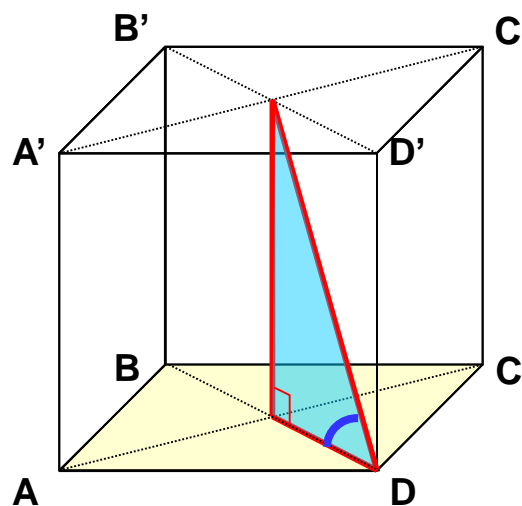
הזווית בין AM' לבסיס התחתון $ABCD$

זווית בין אלכסון לפאה



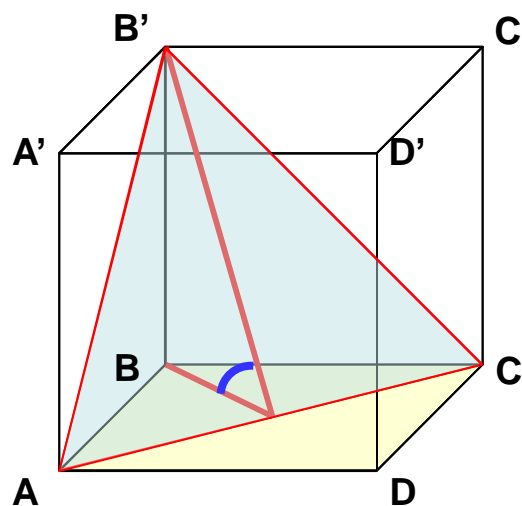
הזווית בין OD לפאה $DCC'D'$

זווית בין אלכסון לבסיס



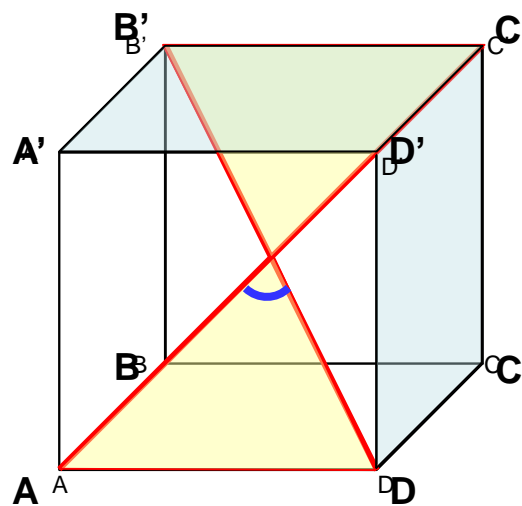
הזווית בין OD לבסיס התחתון $ABCD$

זווית בין מישור לבסיס

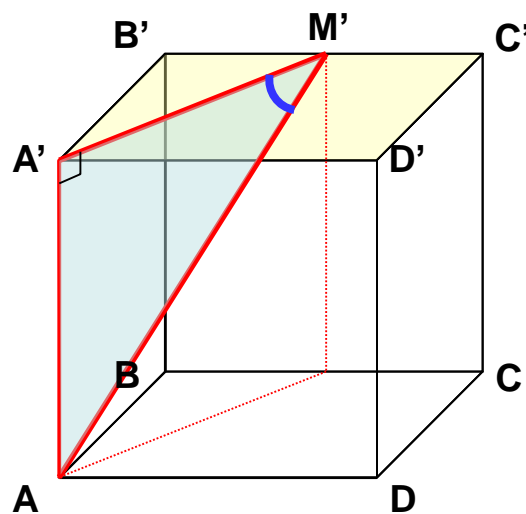


הזווית בין מישור $BA'D$ לבין מישור הבסיס $ABCD$

הזווית בין אלכסוני התיבה



זווית בין אלכסון לבסיס העליון

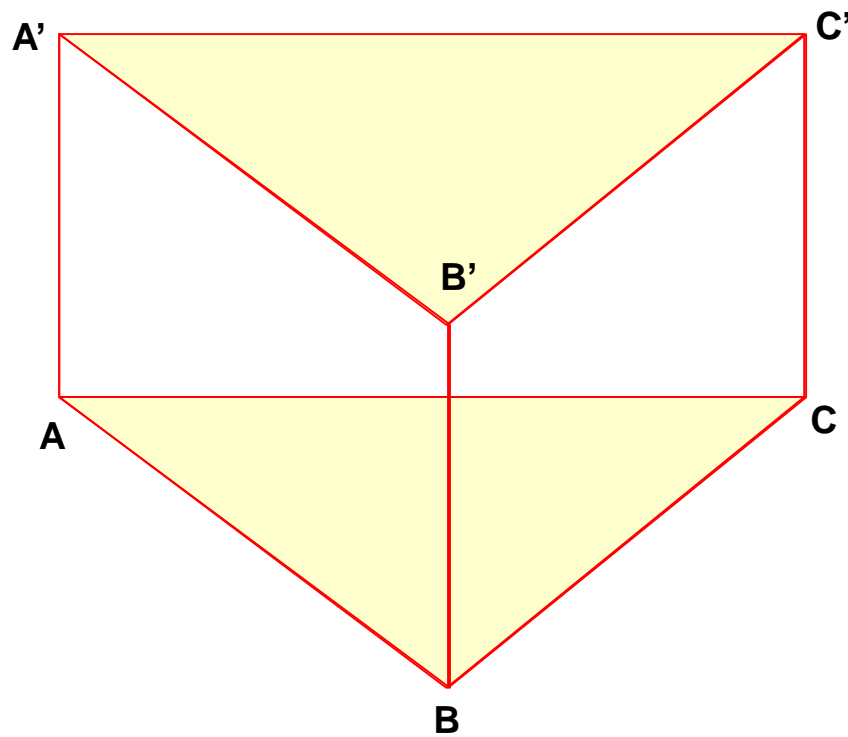


הזווית בין AM' לבסיס העליון $A'B'C'D'$



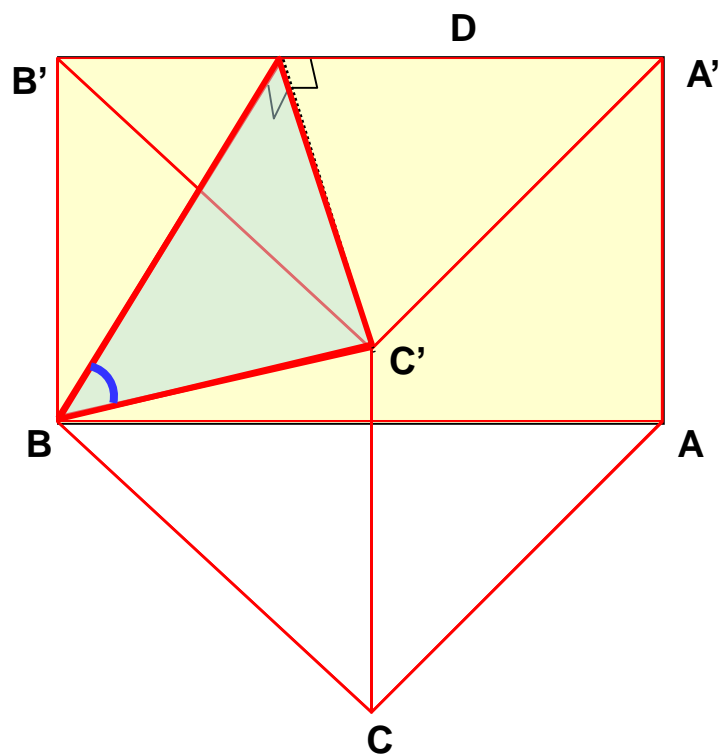
מנסרה משולשת

מנסרה ישרה שבסיסיה משולשים



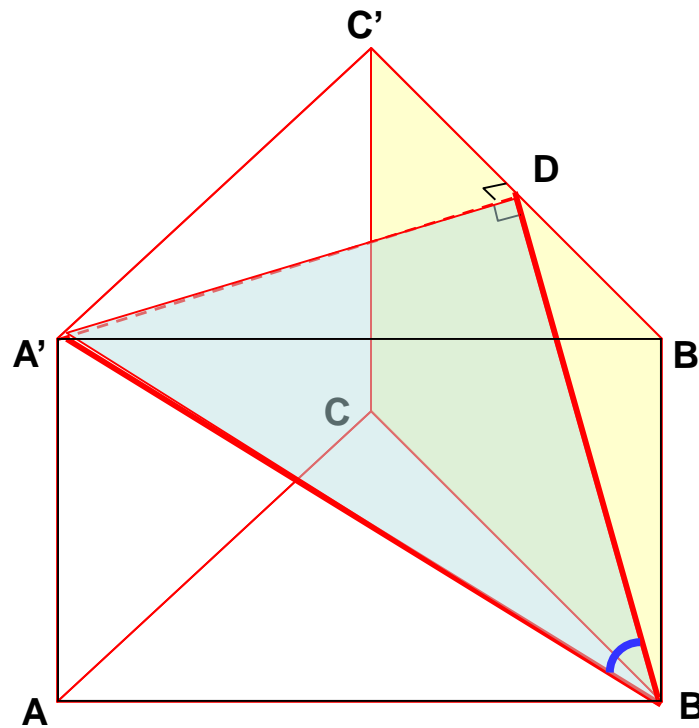
סוגי זוויות במנסרה משולשת

זווית בין מישור לפאה



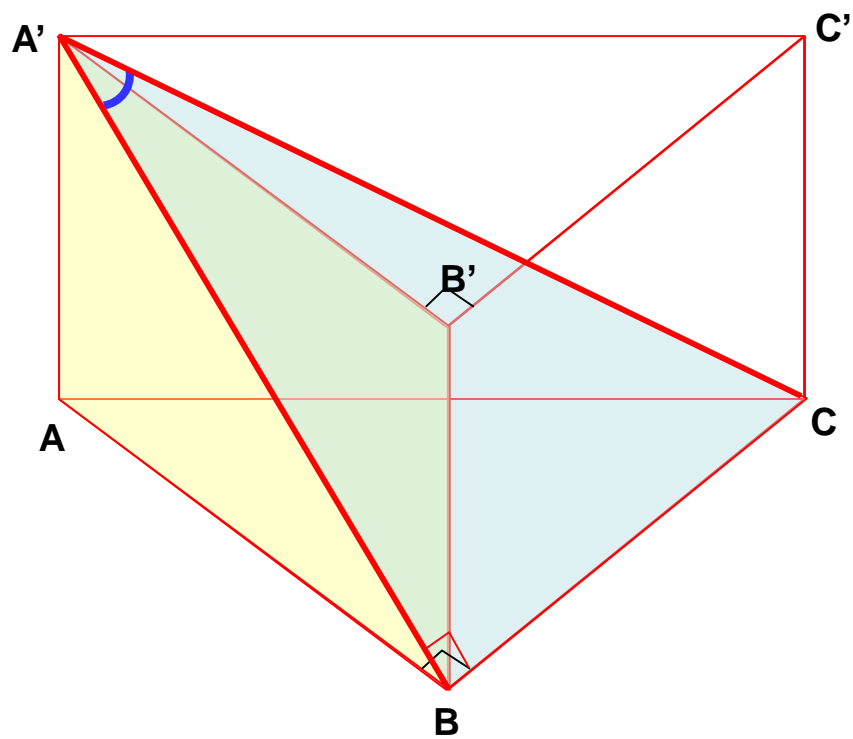
הזווית בין BC' לבין הפאה $ABB'A'$

זווית בין מישורים



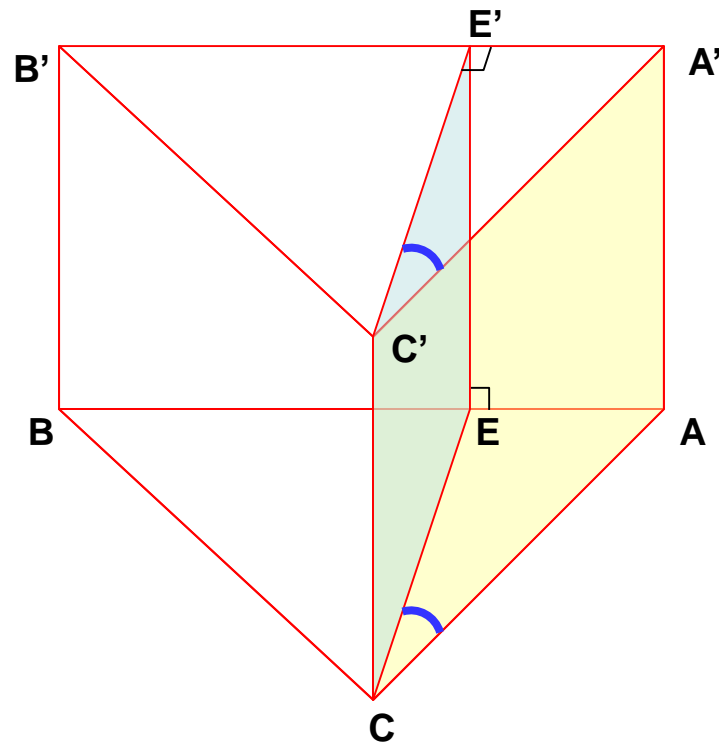
הזווית בין $A'B$ לבין הפאה $BCC'B'$

זווית בין מישור לבסיס



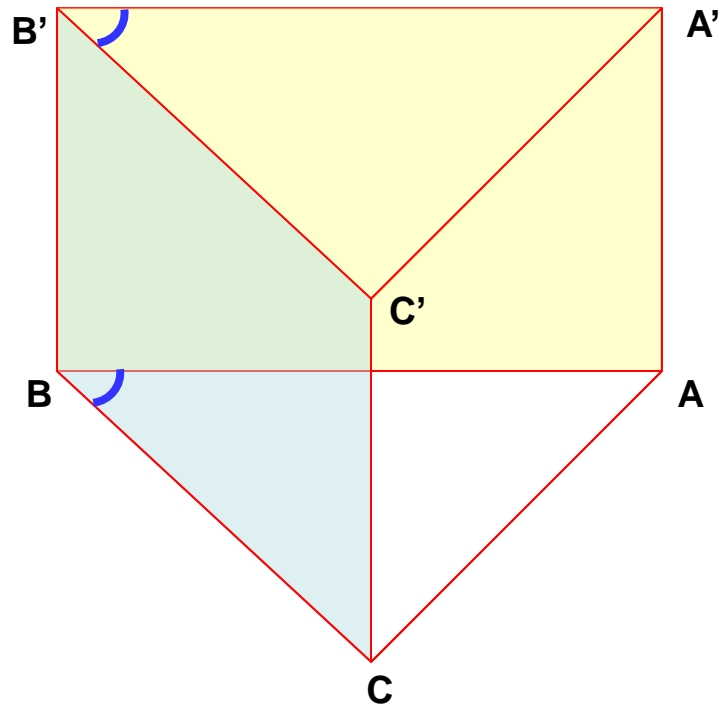
הזווית בין $A'C$ לבין הפאה $A'B'BA$

זווית בין מישורים



הזווית בין מישור $EC'C'E$ לבין המישור $A'ACC'$

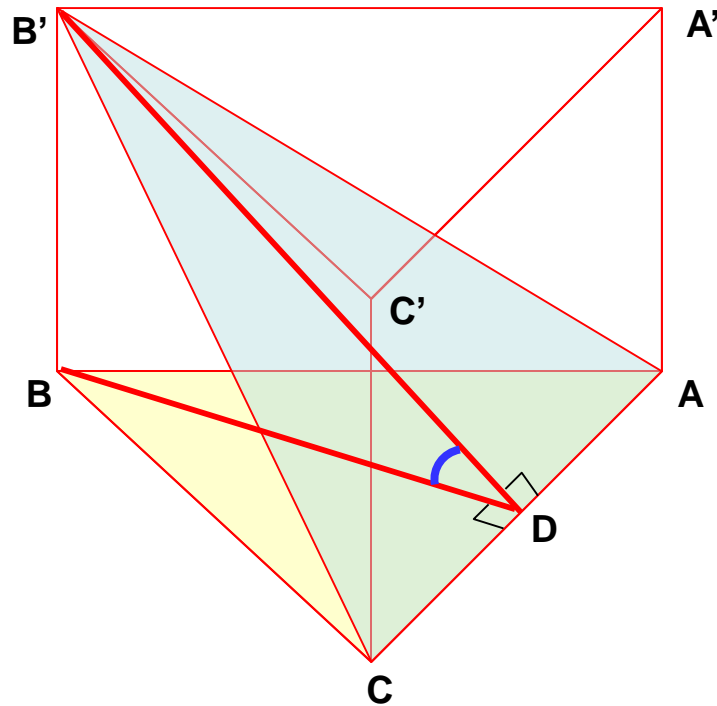
זווית בין מישורים



הזווית בין מישור $ABB'A'$ לבין המישור $BCC'B'$

זווית בין מישור לבסיס

במנסרה משולשת שבסיסה משו"ש $AB=BC$



הזווית בין מישור $A'BC$ לבין הבסיס ABC

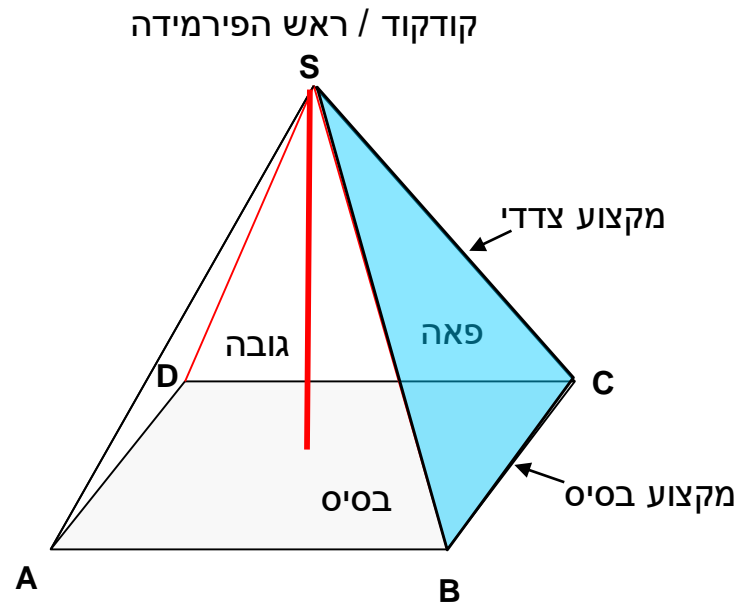


פירמידה ישרה

פירמידה

הגדרה:

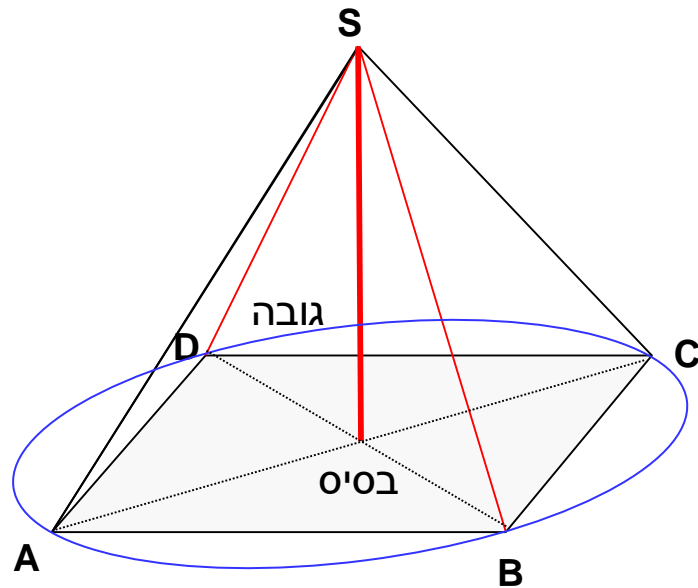
פאון המורכב ממצולע ומספר משולשים העוברים כל אחד דרך צלע אחת של המצולע ונפגשים בנקודה אחת הנמצאת מחוץ למישור המצולע.



פירמידה ישרה

הגדרה:

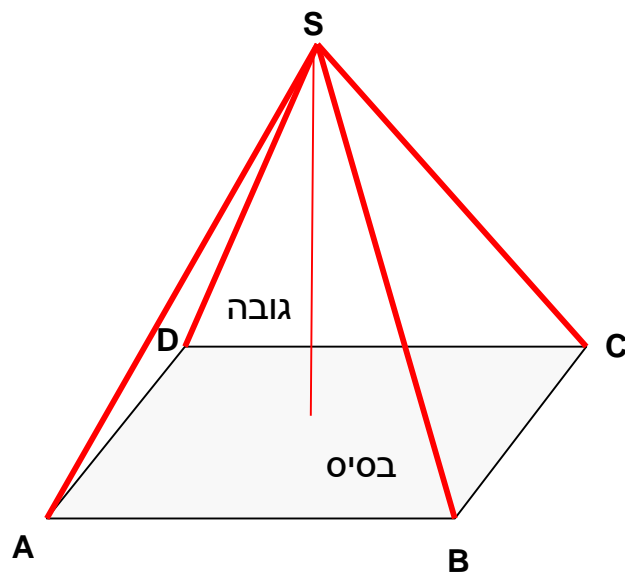
פירמידה ישרה היא פירמידה שעקב הגובה שלה הוא מרכז המעגל החוסם את בסיס הפירמידה.



פירמידה ישרה

משפט:

בפירמידה ישרה כל המקצועות הצדדיים שווים.



כלומר, $SA=SB=SC=SD$

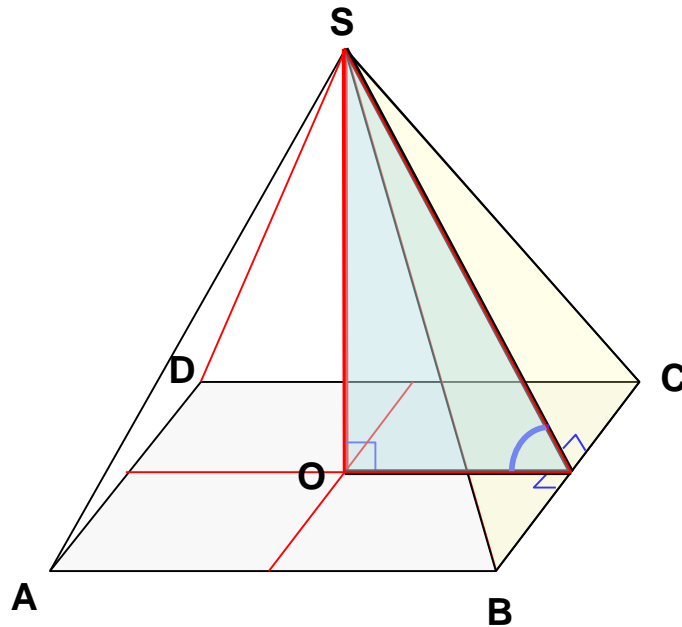
פירמידה ישרה

- כל פאות הפירמידה יחד נקראות מעטפת הפירמידה – סכום שטחיהן נקרא שטח מעטפת הפירמידה
 - המעטפת ושני הבסיסים נקראים פני פירמידה – סכום שטחיהם נקרא שטח הפנים של פירמידה
 - נפח הפירמידה שווה לשליש מכפלת שטח הבסיס בגובה הפירמידה
- $$V = (S \cdot h) / 3$$
- פירמידה שבה הבסיס מצולע משוכלל נקראת פירמידה משוכללת

סוגי זוויות בפירמידה ישרה

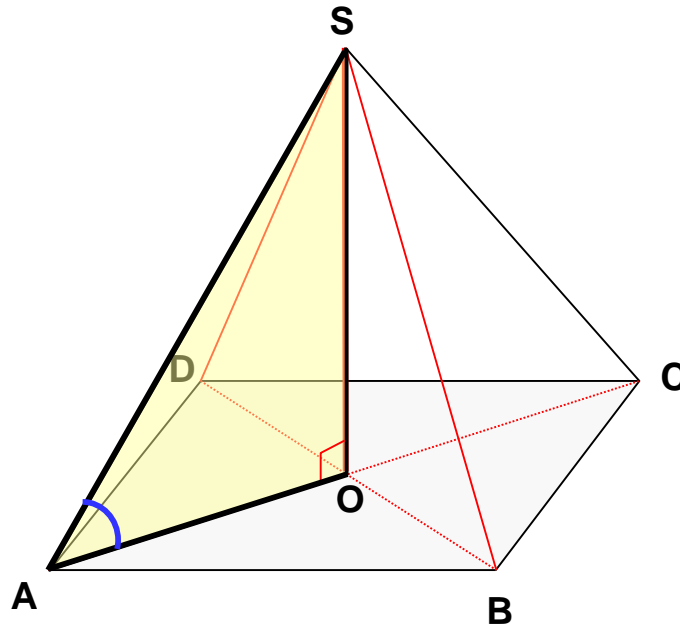
הזווית בין פאה צדדית לבסיס

- הזווית שבין מישורי הפאות למישור הבסיס היא הזווית שבין הגובה של הפאה הצדדית לבין היטלו על מישור הבסיס.

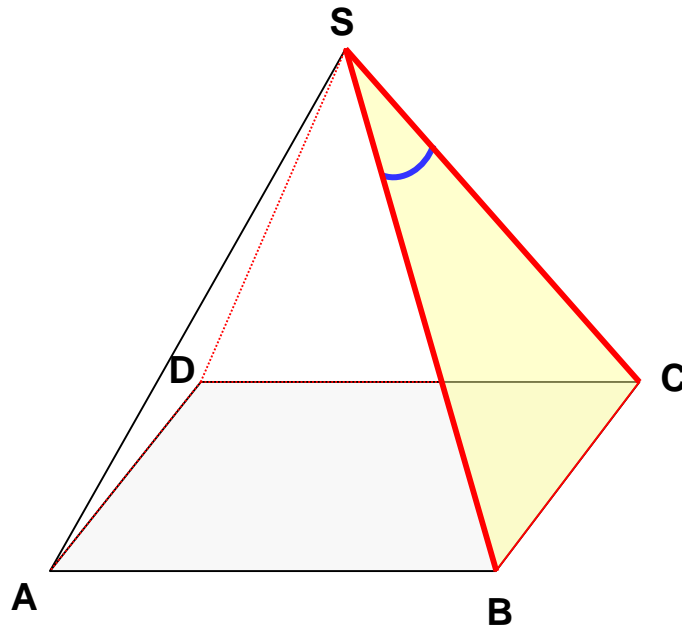


הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס

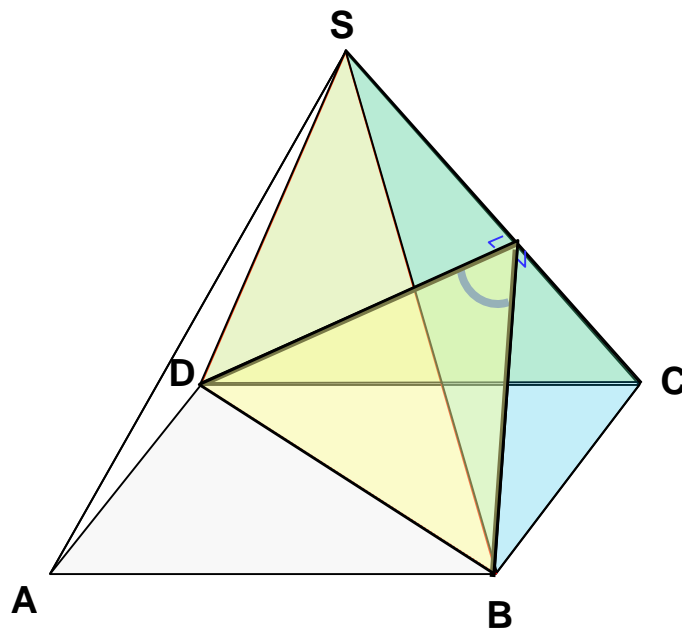
- הזווית שבין מקצוע צדדי למישור הבסיס היא הזווית שבין המקצוע הצדדי לבין היטלו על מישור הבסיס (היושב על אלכסון הבסיס).



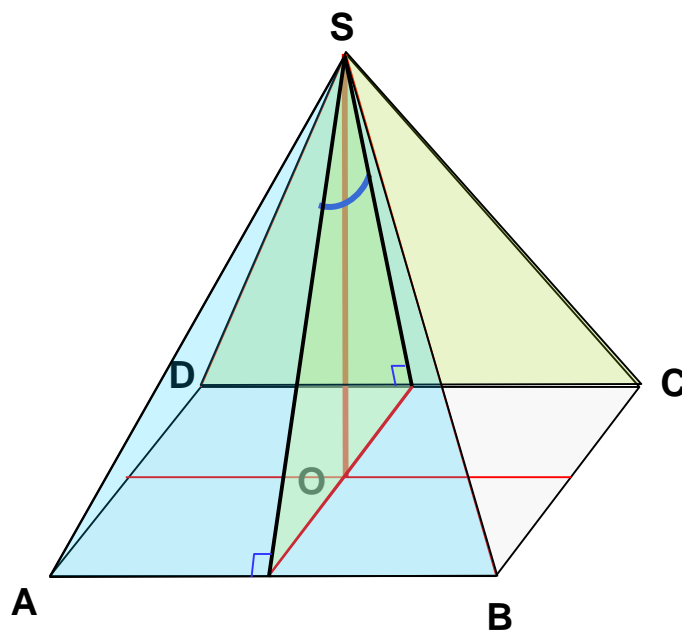
הזווית בין שני מקצועות צדדיים סמוכים



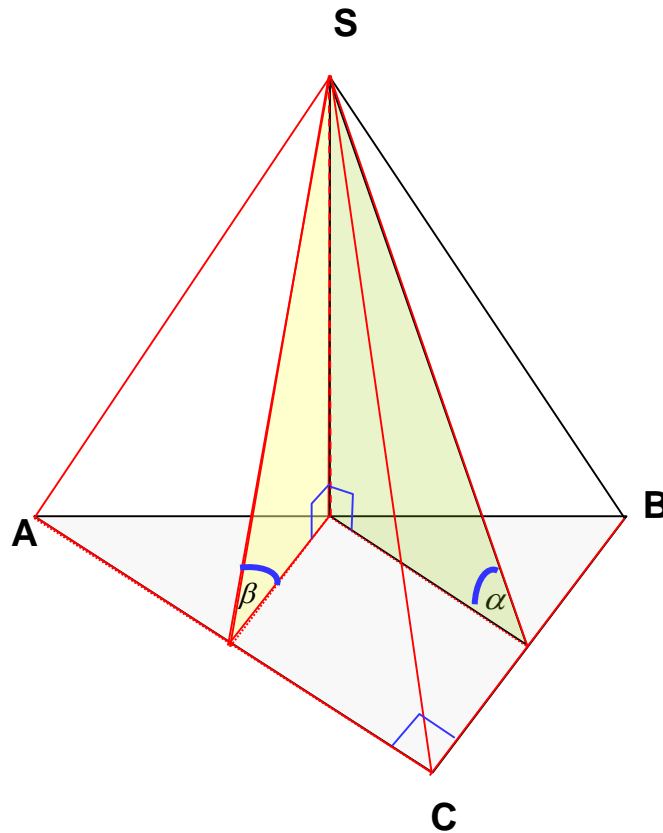
פירמידה שבסיסה ריבוע – הזווית בין שתי פאות צדדיות סמוכות



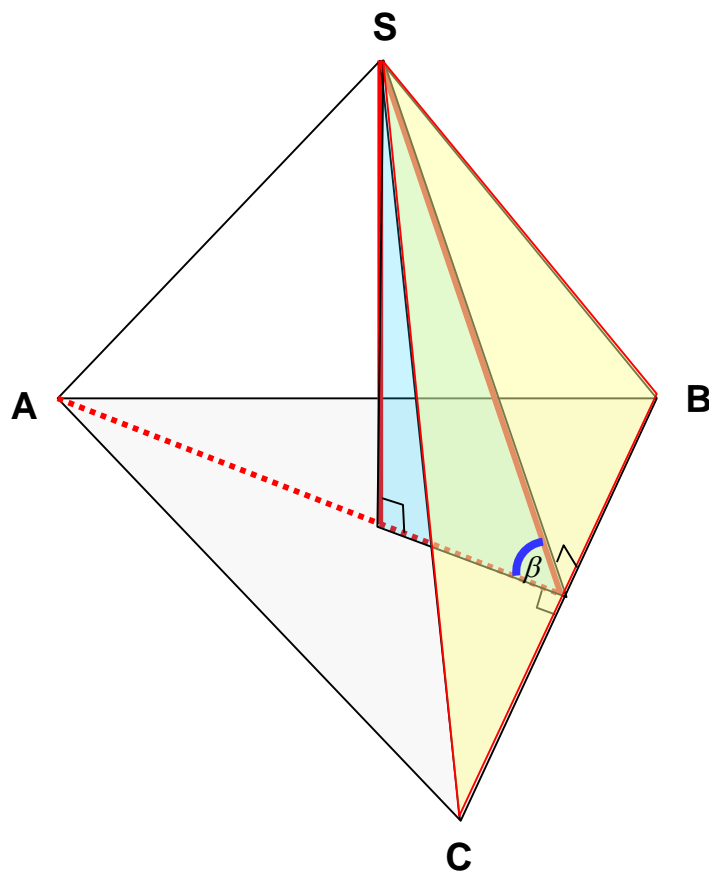
זווית בין פאות צדדיות נגדיות



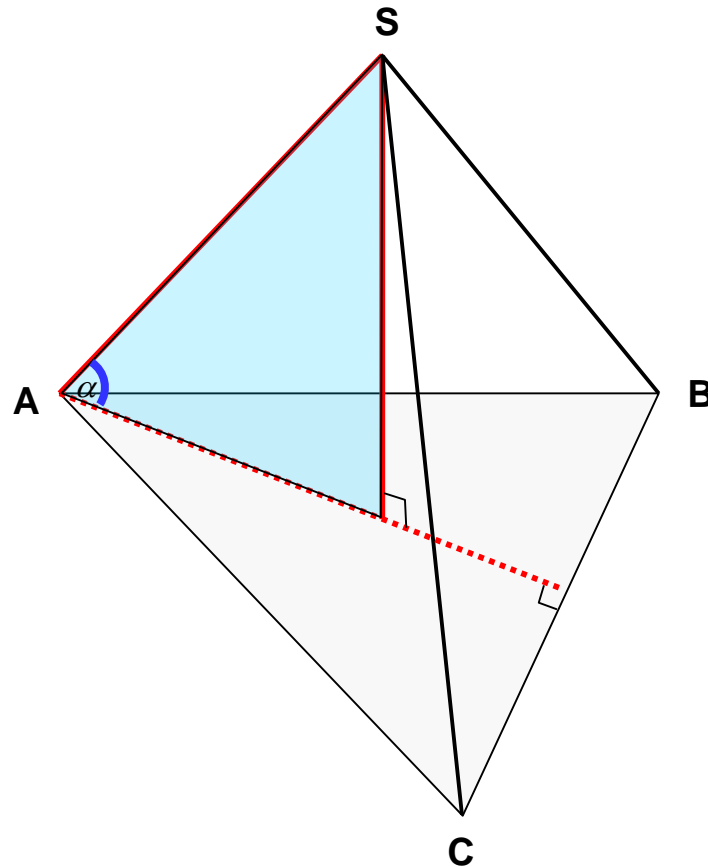
פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית - הזווית בין פאה צדדית לבסיס



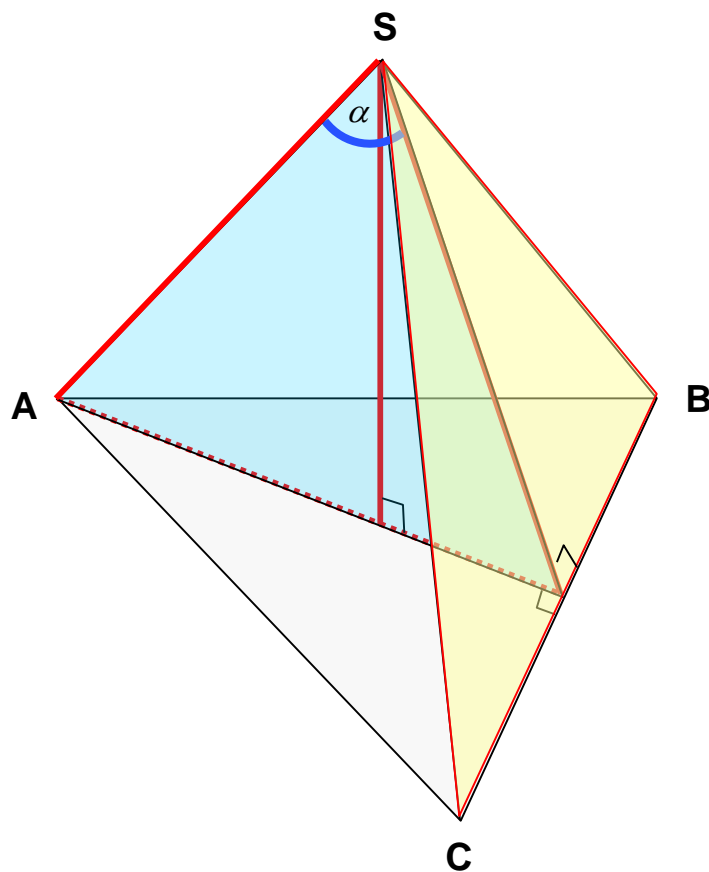
פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים - הזווית בין פאה צדדית לבסיס



פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים - הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס



פירמידה משולשת ישרה משוכללת –
הזווית בין מקצוע צדדי לפאה ממול



၇၁၀