בוחן – 86-147 חדו"א 1 לאודיסאה – 22/12/25

מרצה: דר' ארז שיינר | משך הבוחן: שעה וחצי | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 35 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

<u>שאלה 1</u>:

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}-\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}-\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}-\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}(1+x)}{\sqrt{\frac{1}{x^2}(1+x+x^2)}+\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}(1+x)}{\frac{1}{|x|}\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{x}}\overset{x>0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}(1+x)}{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x^2+x+1}-x$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x=\lim_{x\to\infty}|x|\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\overset{x>0}{=}\lim_{x\to\infty}x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)=\left\{\infty\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}=\infty$$

שאלה 2:

נביט בסדרה a_n המקיימת $a_1 > 0$ וכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_{n+1} = a_n(a_n + 1)$

סעיף א': הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה

ראשית נוכיח כי כל הסדרה חיובית באינדוקציה. נתון כי $a_1 > 0$ ואם $a_n > 0$ אזי $a_{n+1} = a_n(a_n + 1) > 0$.

כעת לכל n מתקיים כי

$$a_{n+1} = a_n(a_n + 1)$$

מותר לחלק כי $a_n \neq 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_n + 1 > 0 + 1$$

כלומר

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

וכיוון שהסדרה חיובית מותר לכפול בa_n ולקבל

$$a_{n+1} > a_n$$

כפי שרצינו.

סעיף ב': חשבו את $\lim a_n$

אם הסדרה חסומה, כיוון שהיא עולה היא מתכנסת לגבול סופי, נסמנו $a_n \to L$

נחשב גבול של שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n(a_n + 1)$$

ונקבל

$$L = L(L + 1)$$

כיוון שהסדרה עולה, $L \geq a_1 > 0$ ולכן מותר לחלק בL ולקבל

$$1 = L + 1$$

ולכן $L = 0$, בסתירה.

מכאן, נובע כי לא ייתכן שהסדרה חסומה, כלומר היא עולה ואינה חסומה ולכן $\lim a_n = \infty$

שאלה 3:

תהיינה סדרות a_n, b_n כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $k \in \mathbb{N}$ עבורו $a_n < b_k$.

סעיף א': הוכיחו או הפריכו: אם $a_n \to \infty$ גם $b_n \to \infty$.

הפרכה:

$$a_n = n$$

$$b_n = (-1)^n \cdot n$$

ברור כי $a_n \to \infty$, וברור כי b_n אינה שואפת לאינסוף (הרי יש לה אינסוף איברים שליליים, ולכן אי אפשר לומר שהחל משלב מסויים כל האיברים גדולים מ$M > 0$ נתון)

נותר להוכיח את הנתונים.

יהי n נבחר $k = 2n$ אזי

$$a_n = n$$

$$b_k = b_{2n} = (-1)^{2n} \cdot 2n = 2n$$

ואכן

$$a_n < b_k$$

כיוון ש $n < 2n$

סעיף ב': הוכיחו או הפריכו: אם $a_n \to \infty$ אזי לb_n אין גבול סופי.

הוכחה:

נב"ש כי לb_n יש גבול סופי, ולכן היא חסומה לפי משפט שלמדנו.

נסמן את החסם ב $|b_n| < M$.

לפי הגדרת הגבול, קיים K כך שלכל $n > K$ מתקיים כי $a_n > M$

בפרט $a_{K+1} > M$.

מהנתונים, קיים k עבורו

$$a_{K+1} < b_k$$

ולכן $b_k > M$, בסתירה.