

פתרון שאלה 2: $\dim(V) = n$, $v \in V$, $T^k(v) = 0$ ~~לכל~~ $i < k$ $T^i(v) \neq 0$

(א) נניח בשלילה שהיא תלויה ליניארית. אז קיימים סקלרים $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$

שהם לא כלם אפס.

$$\alpha_0 v + \alpha_1 T(v) + \dots + \alpha_{k-1} T^{k-1}(v) = 0$$

נניח שהם לא כלם אפס. נבחר i כזה ש- $\alpha_i \neq 0$ ו- i הכי קטן.

[אם יש כמה α_i שונים מ-0 אז נבחר את זה ש- i הכי קטן]

כל $\alpha_j = 0$ עבור $j < i$.

נחלק את המשוואה ב- α_i .

$$T^i(v) + \dots + \alpha_{k-i} T^{k-i}(v) = 0$$

נפעל T :

$$\alpha_i T^{i+1}(v) + \dots + \alpha_{k-i} T^{k-i+1}(v) + \alpha_{k-i} T^{k-i}(v) = 0$$

נפעל שוב ושוב עד ש- $k-i-1 = 0$. נקבל:

$$\alpha_i T^{k-i}(v) = 0$$

$$T^{k-i}(v) = 0$$

לפי k ~~הנחה~~

(ב) $W = \text{sp } B$ הוא תמונת T אינווריאנטית. $T(W) \subseteq W$ זה

$$w = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i T^i(v) \in W \quad (T^0(v) = v \text{ (הזהר!)})$$

$$T(w) = T\left(\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i T^i(v)\right) \stackrel{\text{ליניאריות}}{=} \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i T^{i+1}(v)$$

$$= \alpha_0 T(v) + \dots + \alpha_{k-2} T^{k-1}(v) + \alpha_{k-1} T^k(v) \in \text{sp } B = W$$

לפי

$$\dim(\operatorname{Im} T') = ? \quad T' = T|_W \quad \textcircled{c}$$

$$W \text{ בסדר } B \leftarrow \begin{cases} \text{פתרון: } \operatorname{sp} B = W \\ B \text{ בדרג } (k) \end{cases}$$

ישו שמונה הסתקה היא sp של המונה אברי המס' $T' : W \rightarrow W$

$$\operatorname{Im} T' = \operatorname{sp} \{ T'(u), T'(T(u)), \dots, T'(T^{k-1}(u)) \}$$

המרחב T' של אברי המס' B

T' היא צמצום של T על W וכן של אברי W T' פועל כמו T וכן סדר

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T' &= \operatorname{sp} \{ T(u), T(T(u)), \dots, T(T^{k-1}(u)) \} \\ &= \operatorname{sp} \{ T(u), T^2(u), \dots, T^{k-1}(u), \underbrace{T^k(u)}_{0} \} \\ &= \operatorname{sp} \{ T(u), T^2(u), \dots, T^{k-1}(u) \} \end{aligned}$$

כיון שהמרחב B בדרג k אז B חתך הוא בדרג k

$$\{ T(u), T^2(u), \dots, T^{k-1}(u) \}$$

$$\operatorname{Im} T' = \operatorname{sp} \{ T(u), \dots, T^{k-1}(u) \}$$

$$\dim(\operatorname{Im} T') = k-1$$

הוא המרחב B

ע"פ ש"ס $T: V \rightarrow V$, $R: V \rightarrow V$: 7 שאלה

$$R^2 = T^2 = 0 \quad RT + TR = Id$$

$$V = \ker T + \ker R \quad \text{ש"ס } \textcircled{1}$$

$\ker T$ - מ"מ ק"מ של מ"מ של V - מ"מ ק"מ של V
 $\ker R$ - מ"מ ק"מ

$v \in V$ מ"מ

$$v = Id(v) = (RT + TR)(v) = \underbrace{RT(v)}_{\substack{\text{ש"ס } \ker R \text{ - מ"מ ק"מ} \\ R(RT(v)) = R^2(T(v)) = 0}} + \underbrace{TR(v)}_{\substack{\text{ש"ס } \ker T \text{ - מ"מ ק"מ} \\ T(TR(v)) = T^2(R(v)) = 0}} = 0$$

ש"ס

$$\ker T \cap \ker R = 0 \quad \text{ש"ס } \textcircled{2}$$

$v = 0$ מ"מ $v \in \ker T \cap \ker R$ מ"מ

- $\textcircled{I} - T(v) = 0 \iff v \in \ker T$ מ"מ ש"ס מ"מ מ"מ v
 $\textcircled{II} - R(v) = 0 \iff v \in \ker R$

$$RT(v) = 0 \iff RT(v) = \underbrace{R(0)}_{\text{ש"ס } R \text{ מ"מ } 0} \iff T(v) = 0 \quad \textcircled{I}$$

$$TR(v) = 0 \iff \underbrace{TR(v) = T(0)}_{\text{ש"ס } T \text{ מ"מ } 0} \iff R(v) = 0 \quad \textcircled{II}$$

$$0 + 0 = RT(v) + TR(v) = (RT + TR)(v) = Id(v) = v \quad \leftarrow$$

ש"ס

שאלה 6

מדובר במטריצה אנטי הרמיטית, ולכן הע"ע שלה הם מדומים טהורים (או אפס). העקבה היא סכום הע"ע והדט' היא מכפלתם לכן:

א. $Z_4 \quad Z_1,$

ב. $Z_4 \quad Z_2 \quad Z_1,$

מטריצה ממשית אנטי הרמיטית היא אנטי סימטרית, ולכן בהכרח איברי האלכסון שלה הם אפסים. כמו כן הסדר אי זוגי ולכן הדט' מתאפסת: $\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$. (תוצאה זו נקראת משפט יעקובי) לכן:

ג. Z_4

ד. Z_4