

מבוא לאלגברה ליניארית תרגיל בית 4-פתרון

1. האם למערכת הבאה יש פתרון לא טריוויאלי?

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ כאשר } A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & -10 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

תשובה: כן, למערכת יש פתרון לא טריוויאלי, כי יש בה יותר נעלמים ממשוואות ולכן יש בהכרח משתנים חופשיים.

2. האם למערכת

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

כאשר A מטריצה משאלה 1. בהכרח יש פתרון? אם לא, קבעו תנאים על a, b, c , כך שהמערכת הזאת תהיה עקבית (פתירה).

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -1 & 2a \\ 3 & -6 & 5 & -2 & 4b \\ 5 & -10 & 7 & -3 & 1c \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 3 & -6 & 5 & -2 & 4b \\ 5 & -10 & 7 & -3 & 1c \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 5R_1 \rightarrow R_3 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & b - \frac{3}{2}a \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & c - \frac{5}{2}a \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & b - \frac{3}{2}a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & c - 4a + b \end{array} \right)$$

קיבלנו 3 צירים ולכן המערכת פתירה לכל וקטור $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

שימו לב: אם למערכת הומוגנית יש פתרון לא טריוויאלי המערכת הלא הומוגנית המתאימה לא בהכרח פתירה.

3. פתרו את המערכות הבאות ורשמו את הפתרון הכללי כצירוף לינארי של הפתרון הפרטי של המערכת הלא הומוגנית ופתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה. מצאו בסיס ומימד של מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$א. \begin{cases} x + 2y - z + 3w = 3 \\ 2x + 4y - 4z + 3w = 9 \\ 3x + 6y - z + 8w = 10 \end{cases}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & -1 & 8 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R + R_2 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_2 \\ -\frac{1}{4}R_3 \rightarrow R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - \frac{9}{2}R_3 \rightarrow R_1 \\ R_2 - \frac{3}{2}R_3 \rightarrow R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון הכללי של המערכת הלא הומוגנית הוא:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2t \\ t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא:

$$W = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

ולכן בסיס הוא

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ומימד $\dim W = 1$.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 2w = 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6w = 5 \\ 3x + 4y - 5z + 2w = 4 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\substack{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{R_3 + 2R_2 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

למערכת הלא הומוגנית אין פתרון.

נמשיך לדרג את המטריצה של המערכת ההומוגנית המתאימה:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא:

$$W = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

בסיס ל- W הוא :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ומימד $\dim W = 2$.