פתרון 6 בפונקציות מרוכבות

1. (א) לפי נוסחת קושי לנגזרות עם

$$f(z)=e^{2z}$$

נקבל ש

$$\int\limits_{|z|=3}\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{3!}f^{(3)}(-1)=\frac{2\pi i}{6}\cdot 8e^{-2}=\frac{8\pi i}{3e^2}$$

(ב) נשים לב ששני השורשים של המענה, $\pm i$ נמצאים בפנים המסילה. נפצל לשברים חלקיים ונקבל

$$\frac{e^{tz}}{z^2+1}=\frac{e^{tz}}{(z-i)(z+i)}=\frac{1}{2i}(\frac{e^{tz}}{z-i}-\frac{e^{tz}}{z+i})$$

נחשב רכיב רכיב עם הפונקציה כאשר $f(z)=e^{tz}$ (שהיא כמובן אנליטית) ונקבל לפי נוסחת קושי

$$\int\limits_{|z|=4}\frac{e^{tz}}{z-i}\mathrm{d}z=2\pi ie^{it}$$

$$\int\limits_{|z|=4}\frac{e^{tz}}{z+i}\mathrm{d}z=2\pi ie^{-it}$$

ולכן

$$\int\limits_{|z|=4}\frac{e^{tz}}{z^2+i}\mathrm{d}z=2\pi i\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=2\pi i\sin t$$

(ג) השטיק פה הוא שבעיית האנליטיות של $\frac{\sin z}{z}$ בנקודה $z=0$ היא סליקה. אם מגדירים

$$g(z)=\begin{cases}\frac{\sin z}{z} & z\neq 0\\ 1 & z=0\end{cases}$$

לא רק שהפונקציה הזאת רציפה, היא אפילו אנליטית. (הסבר בנפנופי ידיים: יש לה פיתוח לטור חזקות בכל $\mathbb{C}$, הרי

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots$$

ולכן

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots$$

).לכן אפשר להפעיל את נוסחת קושי עם $g(z)$ ולקבל

$$\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{z(z-1)}\mathrm{d}z = 2\pi i \sin 1$$

(ד) קל לראות שבעצם יש לנו:

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z+1)^2(z-1)^2}\mathrm{d}z$$

בתחום המדובר

$$f(z) = \frac{\cos \pi z}{(z+1)^2}$$

אנליטית ולכן

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z+1)^2(z-1)^2}\mathrm{d}z = 2\pi i f'(1) = 2\pi i \frac{-\sin \pi \cdot 4 - 2(1+1)\cos \pi}{2^4} = \frac{\pi i}{2}$$

2. (א) לא נכון. $f(z) = z^4$ היא דוגמא נגדית.

(ב) על עיגול היחידה $\{z \mid |z| \leq 1\}$ אנחנו יודעים ש $f(z)$ חסומה כי היא רציפה. כלומר קיים M כך שלכל z המקיים $|z| \leq 1$ מתקיים $|f(z)| \leq M$ אבל לכל $z \in \mathbb{C}$ יש n טבעי כך ש $|\frac{z}{3^n}| \leq 1$ ואז

$$|f(z)|] = |f(\frac{z}{3})| = |f(\frac{z}{3^2})| = \cdots = |f(\frac{z}{3^n})| \leq M$$

ולכן $f(z)$ חסומה ולכן קבועה.

3. מספיק להוכיח שלכל z_0 מתקיים $f^{n+1}(z_0) = 0$. לפי משפט קושי, לכל $R > 0$ מתקיים

$$f^{n+1}(z_0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}}\mathrm{d}z$$

לפי משפט של חסם לאיטגרל

$$\begin{aligned} |f^{n+1}(z_0)| &= |\frac{(n+1)!}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}}\mathrm{d}z| \\ &\leq \frac{(n+1)!}{2\pi} \frac{M|z|^n}{R^{n+2}} 2\pi R \leq (n+1)! \frac{M(R+|z_0|)^n}{R^{n+1}} \end{aligned}$$

אם נשאיף את R לאינסוף , הביטוי הימני ישאף ל 0 ולכן $f^{n+1}(z_0) = 0$ כנדרש.

4. נגדיר $g(z) = f(z) - f(2z)$ היא גם פונקציה שלמה אבל היא חסומה ולכן $g(z)$ קבועה. כלומר קיים c כך ש $f(z) - f(2z) = c$. אם נציב $z = 0$ נגלה ש $c = 0$ ולכן $f(z) = f(2z)$. מכאן מוכיחים ש f קבועה כמו בשאלה 1ב.

5. נכתוב $z = x + iy$ ונקבל ש

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= x^2 + 2ixy - y^2 - 3x - 3yi + 2 \\ &= x^2 - y^2 - 3x + 2 + i(2x-3)y \end{aligned}$$

אנחנו מחפשים למעשה מקסימום של הפונקציה

$$|f(z)| = \sqrt{(x^2 - y^2 - 3x + 2)^2 + (2x-3)^2 y^2}$$

לשמחתנו פונקציה זו מקבלת מקסימום בדיוק איפה שהפונקציה

$$|f(z)|^2 = (x^2 - y^2 - 3x + 2)^2 + (2x-3)^2 y^2$$

מקבלת מקסימום מה שמביא אותנו לביטוי טיפה יותר נחמד.
אנחנו כמובן יודעים בוודאות שהמקסימום קיים כי כל הפונקציות רציפות על קבוצה סגורה וחסומה
לפי עקרון המקסימום,ידוע שמקסימום מתקבל בנקודה שנמצאת על שפת המעגל,דהיינו בנקודה שמקיימת $y^2 = 1 - x^2$. נציב גם את האינפורמציה הזאת ונקבל שמחפשים מקסימום עבור

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 1 + x^2 - 3x + 2)^2 + (2x-3)^2(1-x^2) \\ &= (2x^2 - 3x + 1)^2 + (4x^2 - 12x + 9)(1 - x^2) \\ &= 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 6x^3 + 9x^2 - 3x + 2x^2 - 3x + 1 + 4x^2 - 12x + 9 - 4x^4 + 12x^3 - 9x^2 \\ &= 8x^2 - 18x + 10 \end{aligned}$$

כלומר אנחנו מחפשים מקסימום של

$$f(x) = 8x^2 - 18x + 10$$

אבל נשים לב שאנחנו חיים בקטע $[-1, 1]$ (אלה הערכים האפשריים של x). נגזור ונקבל

$$f'(x) = 16x - 18$$

כלומר הפונקציה יורדת לאורך כל תחום ההגדרה ולכן המקסימום יהיה בנקודה $x = -1$ כלומר מקסימום יתקבל בנקודה $z = -1$

6. נניח שקיימת כזו פונקציה, אז לכל z על מעגל היחידה מתקיים

$$|f(z)| = |1 - |z|| = 0$$

כלומר $f(z) = 0$ על מעגל היחידה, ולפי עקרון היחידות $f(z) = 0$. אבל $f(z)$ לא מקיימת את התנאי שלעיל ולכן אין פונקציות כנ"ל.