

תרגיל 9 בפונקציות מרוכבות

1. נניח כי הפונקציות $f(z), g(z), r(z), h(z)$ אנליטיות בסביבה מנוקבת של z_0 . בנוסף נתון כי ב z_0 יש ל f קוטב מסדר 2 ל g יש אפס מסדר 3, ל $r(z)$ אפס מסדר 2 ול $h(z)$ אפס מסדר 1. מהו סוג הסינגולריות ב z_0 של:

$$\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)} \quad (\text{א})$$

$$\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)} \quad (\text{ב})$$

2. תהי z_0 נקודת סינגולריות עיקרית של $f(z)$. תהי $g(z)$ פונקציה שלמה ולא קבועה. הוכיחו כי z_0 היא גם סינגולריות עיקרית של ההרכבה $g \circ f$.

3. תהי z_0 סינגולריות עיקרית של $f(z)$. הוכיחו כי לכל N טבעי ולכל M ממשי קיימת סדרה $z_n \rightarrow z_0$ כך ש

$$|(z - z_0)^N f(z_n)| \geq M$$

לכל $n \in \mathbb{N}$