קבוצות 1

מספרים:

- ספירת תפוחים ← (המספרים הטבעיים) $= \{1,2,3,4.....\}$ $1+x=2$
- 0 לא נחשב מזה שיצא בקורס לבד.
- המספרים השלמים $Z(\mathbb{Z}) = \{0, \pm1, \pm2 ...\}$ $3+x=2$
- המספרים הרציונלים $\left\{\frac{a}{b} \;/\; a,b \in \mathbb{Z},\ b\neq 0\right\}$ מיצגים יחס = ratio
- המספרים הממשיים $\mathbb{R} = \{$כל המס' הטשרעיים$\}$ $x^2=2$

(I)

$\frac{1}{3}\cdot 3 = 1 \rightarrow \frac{1}{3} = 0.333...$

$3\cdot 0.333.. = 0.999...$ $\quad 0.999... = 1$

(II)

$x = 0.999...$ $\quad 10x = 9.999...$

$10x - x = 9$ $\quad 9x = 9$ $\quad x = 1$

- המספרים המרוכבים $\mathbb{C} = \{a+bi \;/\; a,b \in \mathbb{R}\}$ $x^2 = -1$

שדה

הגדרה:

שדה F הוא קבוצה שאיברים עליה פועלות חיבור וכפל ומתקיימות 9 התכונות הבאות:

1. **סגירות**

$$a,b\in F \quad \Rightarrow \quad a\cdot b\in F \ , \ a+b\in F$$

2. **חילוף:**

$$a,b\in F \quad \Rightarrow \quad a+b=b+a \qquad a\cdot b=b\cdot a$$

3. **קיום איברים נייטרליים:**

קיים $0\in F$ כך שלכל $a\in F$

$$a+0=0+a=a$$

0_F נקרא הנייטרלי לחיבור

קיים $1\in F$ כך שלכל $a\in F$

$$a\cdot 1=1\cdot a=a$$

1_F נקרא הנייטרלי לכפל $\quad 0\neq 1$

4. **איברים נגדיים:**

לכל $a\in F$ קיים (נסמן $-a$) שנקרא "$-a$" $\in F$

כך ש- $a+(-a)=0_F$

5. **קיום איברים הופכיים:**

לכל $a\in F\neq 0$ קיים הופכי שנסמן "a^{-1}"

כך ש- $a\cdot a^{-1}=1_F$

6. **אסוציאטיביות (קיבוץ):**

לכל $a,b,c\in F$

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

$3^{(2^3)}$ ולא $(3^2)^3=3^2$

7. **דיסטריבוטיביות (פילוג):**

לכל $a,b,c\in F$

$$a(b+c)=ab+ac$$

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ לא שדה

$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ כן שדה

הוכחת תכונות שדות

תכונות בסיסיות:

יהי שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $a,b,c,0 \in \mathbb{F}$ כך ש:

1. אם $a+b = a+c$ אז $b=c$
2. אם $a \neq 0$ ו $a \cdot b = a \cdot c$ אז $b=c$

נוכיח את (1):

נתון: $a+b = a+c$

$a \in \mathbb{F}$ לכן קיים $-a$ (4)

$$(-a)+(a+b) = (-a)+(a+c)$$

$$(-a+a)+b = (-a+a)+c \quad (6)$$

$$0_{\mathbb{F}}+b = 0_{\mathbb{F}}+c \quad (4)$$

$$b=c \quad (3)$$

מ.ש.ל

טענה:

יהי שדה $\mathbb{F}$, ויהי $a \in \mathbb{F}$ כך ש $a \cdot 0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$

לכן ל $0_{\mathbb{F}}$ אין הופכי כי $1 \neq a \cdot 0_{\mathbb{F}}$

הוכחה:

$$a(0_{\mathbb{F}}+0_{\mathbb{F}}) = a \cdot 0_{\mathbb{F}} \quad (3)$$

$$a \cdot 0_{\mathbb{F}} + a \cdot 0_{\mathbb{F}} = a \cdot 0_{\mathbb{F}} \quad (3)$$

$$a \cdot 0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$$

מ.ש.ל

הגדרה:

מספרים a,b נקראים מחלקי אפס אם $a,b\neq 0$ אך $a\cdot b=0$

משפחה אין מחלקי אפס.

הוכחה:

נניח בשלילה ש־ ab מחלקי אפס $a,b\neq 0$ $a\cdot b=0$

נכפול ב- a^{-1} $0\cdot a^{-1}=ab\cdot a^{-1}$

$0=b\cdot(a\cdot a^{-1})$ ← $0=1\cdot b$ ← $b\neq 0$ סתירה

מסקנה:

אם אין מחלקי אפס אזי $a\cdot b=0$ אזי $a=0$ או $b=0$

(במילים אחרות מקיים את הטענה)

דוגמא:

נסמה לפנינו שדה עם שני איברים $\mathbb{Z}_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$

$\bar{0}\cdot\bar{0}=0$ $\bar{0}+\bar{0}=0$

$\bar{0}\cdot\bar{1}=0$ $\bar{1}+\bar{0}=1$

$\bar{1}\cdot\bar{0}=0$ $\bar{0}+\bar{1}=1$

$\bar{1}\cdot\bar{1}=1$ $\bar{1}+\bar{1}=0$

דוגמא:

$0,0,1\in\mathbb{Z}_2$

$1+(0+0)=(0+1)+0$

$0+1=1+0$

דוגמא:

$\bar{a},\bar{b}\in\mathbb{Z}_n$ $\mathbb{Z}_n=\{\bar{0},\bar{1},\dots\bar{n-1}\}$

$\bar{a}+\bar{b}=a+b \bmod n$

$\bar{a}\cdot\bar{b}=a\cdot b \bmod n$

$\mathbb{Z}_8$

$\bar{4}\cdot\bar{2}=4\cdot 2 \bmod 8=\bar{0}$

ב $\mathbb{Z}_8$ יש מחלקי 0 ! לכן אין שדה

אם n אינו ראשוני $\mathbb{Z}_n$ אינו שדה כי יש בו מחלקי אפס

אם p ראשוני $\mathbb{Z}_p$ שדה (בלי הוכחה)

דוגמאות:

$\bar{4} \in Z_7$

מ. הנגד. של 4? $\bar{3}+\bar{4} = (3+4) \bmod 7 = 0$ $\quad (-\bar{4}) = \bar{3}$ ←

מ. ההופכי של 4? $\bar{4}\cdot\bar{2} = 8 \bmod 7 = 1$ $\quad (\bar{4}^{-1}) = \bar{2}$ ←

שדה המרוכבים

$\mathbb{C} = \{ a+bi \mid a,b \in \mathbb{R} \}$ סימון! כלומר איבר ו-i אינו שווה

$1+2i \neq 2+1\cdot i$

כאשר חיבור וכפל:

$$(a+bi)+(c+di) := (a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)\cdot(c+di) := (ac-bd)+(ad+bc)i$$

$1\cdot i = i$ $\quad bi = 0+bi$ $\quad a = a+0i$ כמו

$a+bi = a+bi$ → $a+0i+0+bi = (a+0)+(0+b)i$

(מגדיר) (סימן)

$(i)^2 \stackrel{?}{=} -1$ $\quad (0+1\cdot i)^2 \stackrel{?}{=} (-1)$ שאלה:

$(0+1\cdot i)(0+1i) = 0-1+(0+0)i = -1+0i = -1$

① כפל ב-0

$0 = 0+0i$ $\quad 1 = 1+0i$

$(a+bi)+(0+0i) = a+bi$ נגיד במאמר 0 נקרא נייטרלי לחיבור

$(a+bi)\cdot(1+0i) = (a-0)+(0+b)i = a+bi$ נייטרלי

1 נקרא נייטרלי לכפל

② כפל

$a+bi+(-a+(-b)i) = 0+0i$

③ הופכים

$a+bi \neq 0$ אזי → $c+di$ קיים כך ש-

$(a+bi)(c+di) = 1$

$(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\right) = 1$ נקרא גם הצמוד

$a^2+b^2 \neq 0$ $\quad a+bi \neq 0$

עכשיו $\mathbb{C}$ כבר שדה!

תרגיל

סימונים:

$z = a+bi$ $\quad \bar{z} = a-bi$ — מספר מרוכב וצמוד

$Re(z) = a$ $\quad Im(z) = b$ — חלקים

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

טכניקה:

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

הוכחה:

$(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab+ba)i$

$a^2+b^2 = |z|^2$

חילוק — כאשר c הוא מספר ממשי

$$\frac{z}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}i$$

מסקנה: מספר מרוכב וצמוד

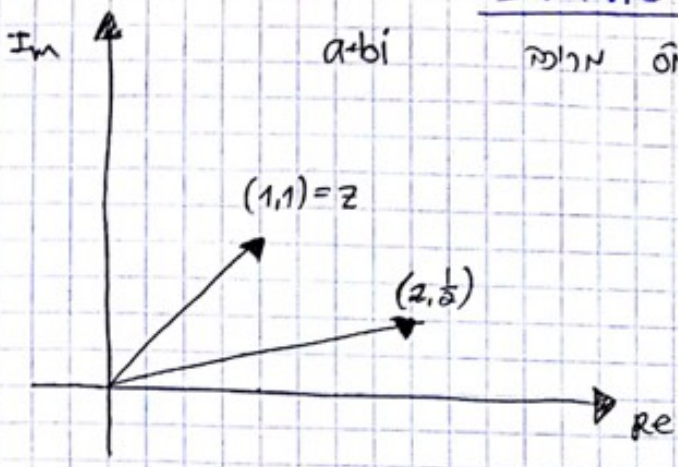
$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

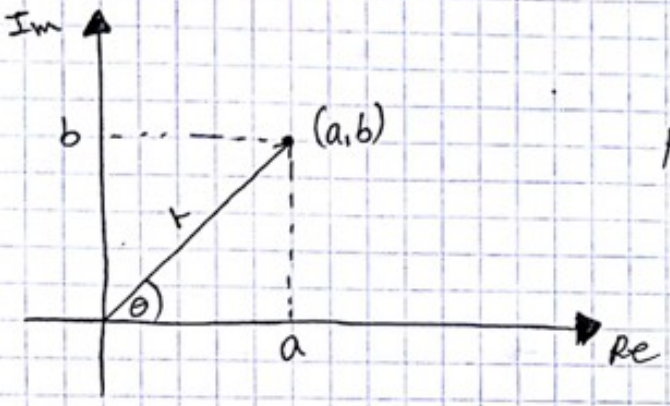
$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

הערה: אם נתון $|z|^2$ כך ש $|z| \neq 0$ אז $z \neq 0$

צורה קוטבית של מספר מרוכב

נבין את המישור המרוכב. כל מספר מרוכב ניתן לייצג ע"י נקודה (a,b)





כל נק' $(a,b)\neq(0,0)$ נתן לייצג באופן יחיד ע"י הזוג θ, r.

r = מרחק מהשורש הנבחרים

θ = הזווית מהחלק החיובי של ציר הממשי נגד כיוון השעון

מהיכן $r\operatorname{cis}\theta$

$$\frac{a}{r}=\cos\theta \qquad a=r\cos\theta$$

$$\frac{b}{r}=\sin\theta \qquad b=r\sin\theta$$

$$a+bi = r\cos\theta + ir\sin\theta = r\operatorname{cis}\theta$$

איך נמצא r ו θ כאשר נתון $a+bi$:

r שווה ל $|z|$ $\qquad r=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$

[redacted]

$a>0 \qquad \theta=\arctg\left(\frac{b}{a}\right)$

$a<0 \qquad \theta=\pi+\arctg\left(\frac{b}{a}\right)$

$a=0 \quad b>0 \qquad \theta=\frac{\pi}{2}$

$a=0 \quad b<0 \qquad \theta=\frac{3\pi}{2}$

$(a+bi)+(c+di)$ — מצורה הקרטזית של $(a+bi)$ לצורה

$(r_1 \cdot cis\theta)\cdot(r_1 \cdot cis\theta_2) =$ — מצורה הקוטבית של $(r\,cis\theta)$ לצורה

$r_1 \cdot r_2 \cdot cis(\theta_1+\theta_2)$

הוכחה:

$r_1 \cdot cis\theta_1 \cdot r_2 \cdot cis\theta_1 =$

$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$

$r_1 \cdot r_2\,(\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 + \sin\theta_1\cdot\sin\theta_2) +$

$r_1 \cdot r_2\,(\cos\theta_1\cdot\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cdot\cos\theta_2)i =$

$r_1 \cdot r_2\,(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) =$

$r_1 \cdot r_2\, cis(\theta_1+\theta_2)$ <u>q.e.d</u>

$$\begin{cases}(1+i)x+y=0 & /\cdot(1-i) \\ (3+i)x+y=2\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}2x+(1-i)y=0 \\ (3+i)x+y=2\end{array}$$



כפל המשוואה I ב- $\frac{3+i}{2}$

$$0+y-\frac{(3+i)(1-i)}{2}y=2$$

$$y-\frac{3+1-3i+i}{2}y=2$$

$$y-2y+iy=2$$

$$(-1+i)y=2 \qquad /(-1-i)$$

$$2y=-2-2i \qquad \boxed{y=-1-i \qquad x=1}$$

תכונות של מרוכבים

1. עבור 2 מרוכבים z_1, z_2:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{\overline{z_1}} = z_1$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$$

מערכת משוואות לינאריות ומטריצה

נשתמש כעת בסימון מערכת משוואות ומטריצה.

מה שימוש 1 בשבוע ג' מטריצות

מערכת משוואות לינאריות עם n משתנים ו- m משוואות מעל שדה $\mathbb{F}$,

היא מערכת מהצורה: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_n$$

המשתנים: $x_1, \dots x_n$

המקדמים: $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{F}$

פתרון של המערכת הוא n-יה של איברים מהשדה $(x_1 \dots x_n)$ כך שאם נציב אותם במשוואות, כל המשוואות יתקיימו.

דוגמה:

נבנה מערכת משוואות ע"י מטריצה מדוגמה

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

הערה:

מערכת משוואות נקראת הומוגנית אם $\forall i: b_i = 0$

במקרה כזה נשים את המטריצה בלעדי עמודת הפתרונות

לדוגמה:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

פעולות בדרך אלמנטרית

1. החלפת שורות $R_i \leftrightarrow R_j$
2. $a \in F \quad a \neq 0$ aR_i
3. $i \neq j$ $R_i + aR_j$

שאלה:

אם B שקולה ל-A ע"י סדרה סופית של פעולות, שלב ב' פתרון של A הוא גם פתרון של B.

הוכחה:

① אם $(x_1 \dots x_n)$ פתרון למערכת של A (הוא מקיים את כל המשוואות) הפתרון עדיין מקיים את כל המשוואות, מכאן שהוא אף פתרון.

② $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad / \cdot a$

$$aa_{i1}x_1 + \dots + a \cdot a_{in}x_n = ab_i$$

המשוואה ה-i במערכת B והיא מתקיימת.

③ $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ (משוואה i, j במערכת A)

$a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j$

המשוואה j היא במערכת B? היא המשוואה j של A לכן מתקיימת.

המשוואה i במערכת B היא $\dots + x_1(a_{j1}a + a_{i1}) + \dots$ היא מתקיימת.

כי מתקיים משוואה שמתקיימת.

שאלה:

אם השורות של A ו-B ע"י פעולות דירוג אלמנטרי נתון שם לתוצאה של B של A ע"י פעולות דירוג.

מסקנה:

אם השורות של A ו-B:

① כל פתרון של A הוא פתרון של B ② כל פתרון של B הוא פתרון של A

ולכן ל-A ול-B אותם פתרונות.

הוכחה:

נראה שכל פעולה היא הפיכה, וכך אם נבצע את הפעולה ההפוכה נגיע ל-A

① $R_j \leftrightarrow R_i$ פעולה סימטרית

② $a \neq 0 \quad aR_i$ ההפיכה ← $R_i \cdot \frac{1}{a}$

③ $R_i + aR_j$ ההפוכה ← $R_i - aR_j$

הערה:

אם $i=j$ אז המשוואה הנלוות הבאה לא בהכרח תתקיים

למשל אם $j=i$ $a=-1$ הבאה אינה הפיכה.

הגדרה:

מטריצה נקראת מדורגת אם מתקיימים התנאים הבאים:

① אין שורות אפסים מעל שורות שאינן אפסים.

② בכל שורה האיבר הראשון משמאל שאינו 0 נקרא איבר פותח או מוביל

האיברים הפותחים נמצאים מימין לפותחים שמעליהם.

③ למטריצה A יהיו לפחות כמה בדיוק מדורגות שונות.

④ אם שתי עמודות ב-A ו-B זהות, אז A ו-B נקראות שקולות שורה.

שאלה מתפרקת

הגדרה:

כל משתנה שמופיע על בסיס המדורג יש איבר פותח נקרא משתנה תלוי

שאר המשתנים נקראים חופשיים.

דוגמה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad z=0 \quad x=3-y-2z \leftarrow x=3-y$$

y יכול להיות כל מספר ממשי כי הוא חופשי ואין תלוי.

* אחרי שיש לנו מטריצה מדורגת אנחנו יודעים שהמשתנים התלויים

את אחרי הפנוי מעמודה.

דוגמה:

מצא פתרון כללי למערכת:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

① נעלה חופשיים/תלויים. ② שים לב חפש סדר פחות $y=t$ $w=s$

$$z=2$$

$$x=-3-s \leftarrow x+2z+w=1$$

$$\text{פתרון כללי} = (s, 2, t, -3-s)$$

$$= (0,0,1,0)t + (-1,0,0,1)s + (0,2,0,-3) =$$

משפט:

המשתנים החופשיים אינם קשורים לצורה המדורגת הקנונית.

בכל צורה מדורגת קנונית המתאימה למערכת הנתונה

הוכחה:

נניח בשלילה של-A יש צורות מדורגות קנוניות שונות.

נסתכל על המשתנה הכי ימני, שנמצא בין 2 הצורות

אך תמיד בצורה אחת וחופשי בצורה שנייה

בהינתן הנקודה ממימד של כל המשתנים החופשיים אחרי x_k בקומה I

נקבל פתרון יחיד ל- x_k

במידה והשלה קיימת, בעצם כל שינוי לפתרון ל- x_k כל מספר מהשלה.

לכן יש פתרונות שונים ל- II הצורות המדורגות מסתירה.

כאשר יודעים שאין שורת סתירה:

מניחים ש A מייצג מערכת הומוגנית.

הערה:

מערכת הומוגנית תמיד יש פתרון (הפתרון של 0)

דוגמה:

הוכיחו שבמערכת המשתנים הומוגנית אינה תלויה בקודקוד.

נראה שמרחב הפתרונות מספר המשתנים

x תלוי, y חופשי ← $(0;1\ 1)$ $\quad x+y=0$

אם נסמן את מספר המשתנים y תלוי, x חופשי

הגדרה:

A יקרא מדורג קנוני אם A מדורג ומקיים:

① כל האברים הפותחים שווים 1. ② מעל כל איבר פותח יש רק אפסים.

צורה מדורגת קנונית, הפתרון מיד בראותו.

דוגמה: כל משתנה תלוי מופיע בשלם החופשיים, והקבוע.

$$\begin{pmatrix} x & y & z & w \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$w=s \quad z=-4s \quad y=t$

$x=-2t-3s$

שורת סתירה:

במערכת של משוואות שורת סתירה, היא שורה בה מקדמי המשתנים הם 0 אך הקבוע אינו 0 $(0=a)$

אי אפשר לקיים משוואה כזו ולכן אם יש שורת סתירה אין פתרון למערכת.

סיכום:

מקרי קצה בפתרון:

1. מפרקים
2. אם יש שורת סתירה אין פתרון!
3. אחרת, אם אין חופשיים יש פתרון יחיד. אם יש חופשיים אז יש (מס' האפסים משפה) בחלקה (מס' האפסים החופשיים) בכדי את השפה אינסוף יהיו אינסוף.

כיצד יודעים שקיבלנו שורת סתירה על ידי פקודת הדירוג?

שורת סתירה = מספר האפסים יש אחד פחות לאחר שהמספרים בהן יש אחרים פחות בפי השורה המקודמת

שלבי הדירוג שלום לדירוג:

1. מדרגים בעזרת ה-I ומחפשים איזה שנה מ-0
2. אם אין עוברים לעמודה הבאה.
3. אם יש, עושה שורה כי לעשות, מחלק בראשון בעזרת ה-I ויוצא שם 1
4. נכון את כל האפסים מתחתיו
5. עובר לעמודה הבאה ושורה את לעשה
6. נעשה כך, ונעשה עבורה מדרגה קנונית. (לאחר איפוס מעל איברים פתחום)

$$\begin{pmatrix}0&1&2\\2&1&3\\3&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&2\\3&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac32\\0&1&2\\3&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac32\\0&1&2\\0&-\frac32&-\frac72\end{pmatrix}$$

R_3-3R_1

$R_3+\frac12R_2$

$$\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac32\\0&1&2\\0&0&-\frac12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac32\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac12&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$R_1-\frac32R_3$
R_2-2R_3

$R_1-\frac12R_2$

מסקנה:

לכל מטריצה יש צורה קנונית.

משפט:

לכל מטריצה יש צורה קנונית **יחידה**.

הוכחה:

נניח שיש 2 צורות קנוניות שונות ונקרא לסדרה.

הראשון הדחוק שיש מטריצה אחת עמוד עם איברים שונים.

העמודה ה-I עם איבר בודד הוא $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ לכן הגאה, לכן

ל-B הצורה העמודה הזאת למה.

נכון קיימת עמודה של משתנה חופשי, שנקרא ב-B הצורת.

נניח המשתנה החופשי הזה x_k. נציב 0 בכל המשתנים החופשיים

השוחרים ו x_k נציב 1.

נכון המקיים שוויון מדוק למינוס (הדרך השונה שלנו בעמודה k)

קיבלנו סתירה שנוכח לאותם הצבה של החופשיים בסתירה. **משל**

פעולות על מטריצות

סימון:

יהי $\mathbb{F}$ שדה, נסמן ב- $\mathbb{F}^{m\times n}$

את אוסף המטריצות עם m שורות ו n עמודות ומספרים מ- $\mathbb{F}$

חיבור מטריצות:

תהיינה $A,B \in \mathbb{F}^{m\times n}$

נגדיר חיבור איבר איבר מטריצה $A+B \in \mathbb{F}^{m\times n}$

לכל i,j $[A+B]_{ij} := [A]_{ij} + [B]_{ij}$

אזי סימון: $[A]_{ij} = a_{ij}$

דוגמא:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

כפל בסקלר:

תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$

נגדיר $\alpha \cdot A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ $[\alpha A]_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

דוגמא: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $0_{\mathbb{F}} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\alpha = 0 \in \mathbb{F}$

תכונות:

תזכורת - $\forall A,B \in \mathbb{F}^{m\times n}: A+B = B+A$

אסוציאטיביות - $\forall A,B,C \in \mathbb{F}^{m\times n}: (A+B)+C = A+(B+C)$

נ"ל - $\forall A \in \mathbb{F}^{m\times n}: A + O^{m\times n} = A$

פתיחת סוגריים - $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{F}\ \forall A,B \in \mathbb{F}^{m\times n}: (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

אסוציאטיביות - $(\alpha\cdot\beta)A = \alpha(\beta A)$, $0_{\mathbb{F}} \cdot A^{m\times n} = O^{m\times n}$

כפל מטריצות

נעסוק בהגדרה כפל שורה בעמודה.

כפל מטריצות אינו מקיים את תכונת החילוף בהכרח.

נתונים $A \in \mathbb{F}^{1\times m}$ שורה

$B \in \mathbb{F}^{m\times 1}$ שורה

$A \cdot B = ?$

$AB := (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_my_m)$ $\quad AB \in \mathbb{F}^{1\times 1}$

דוגמא: $(1,2,3)\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} = (4)$

סימון:

$R_i(A) \in \mathbb{F}^{1\times m}$ $\quad A \in \mathbb{F}^{n\times m}$ נתון

$[R_i(A)]_{1j} := a_{ij}$

$[C_j(A)]_{i1} := a_{ij}$ $\quad C_j(A) \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ מוגדרת באופן

דוגמא: $A = \begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\3&1\end{pmatrix}$ $\quad R_2(A) = (0,-1)$ $\quad (R_2(A))_{1j} = -1$

הגדרה כפל מטריצות:

$A \in \mathbb{F}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{F}^{m\times k}$

נתון

$A \cdot B \in \mathbb{F}^{n\times k}$ $\quad (n\times m)\cdot(m\times k)$

נגדיר

עבור $1 \le i \le n$ $\quad 1 \le j \le k$

$[A\cdot B]_{ij} := R_i(A)\cdot C_j(B)$

דוגמא: $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\end{pmatrix}^{2\times 3}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&0\end{pmatrix}^{3\times 2} = \begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}^{2\times 2}$

דוגמא: $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}^{(3\times 1)}\cdot(1,2,3)^{(1\times 3)} = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\-1&-2&-3\end{pmatrix}^{3\times 3}$

דוגמא משלמה:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&1\end{pmatrix}^{2\times 3}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}^{(3\times 1)} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\quad\end{pmatrix}^{2\times 1} =$$

$$= \begin{pmatrix}x+2y+3z\\-y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}x+2y+3z=1\\-y+z=1\end{cases}$$

$A\cdot\bar{x} = \bar{b}$ נסמן מערכת משוואות כך:

$$A\cdot\bar{x}=\bar{b} \quad\Leftrightarrow\quad \underset{A}{(1,1,1)}\cdot\underset{\bar{x}}{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}=\underset{\bar{b}}{(1)} \qquad x+y+z=1$$

דוגמא:

$$f:\mathbb{R}^{3\times1}\to\mathbb{R}^{2\times1}$$

נסדיר פונקציה

$$f\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}x+y\\y-z\end{pmatrix}$$

אני שמח שהפונקציה הזאת הסתדרה כפל מטריצה

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

נמצא קיים A

$$A^{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}^{3\times1}=(\ )^{2\times1}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\y-z\end{pmatrix}$$

דוגמא:

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_{n+2}\end{pmatrix} \qquad a_1=1 \quad a_0=0 \quad \text{נסדיר}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_0+a_1\end{pmatrix} \quad n=0 \quad \text{נניח}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad n=1 \quad \text{נניח}$$

נשלים את: $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ (פיבונאצ'י)

סיכום: סכום

$$\sum_{i=1}^{n} f(1)=$$

נניח ש $f(i)$ $i=1,2..,n$ ונסכום את כל המקרים.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}=1,\frac{1}{4}+\dots\frac{1}{n^2} \qquad \sum_{i=1}^{n}3=3n$$

כפל מטריצות – הגדרה פורמלית

$A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times k}$ תהיינה

$$[A \cdot B]_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \cdot b_{pj}$$

דוגמה:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[A \cdot B]_{23} = -1 + \sum_{p=1}^{2} a_{1p} \cdot b_{p3} =$$

$$= a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} = -1 + 0 = -1$$

סימון:

$\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots x_n) : | \; x_i \in \mathbb{F}\}$ $\mathbb{F}$ -ו מעל n ה-n יות של $\mathbb{F}^n$

תהיינה $v_1, \ldots v_k \in \mathbb{F}^n$

$(\in \mathbb{F}^{n \times k})$ $\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ $v_1 \ldots v_k$ שמוגדרת הן המטריצה

$v_2 (0,1,2)$ $v_1 = (1,2,3)$

$$\begin{pmatrix} - v_1 - \\ - v_2 - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

כאשר $v_1 \ldots v_k \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ כאמור שאם

.אשר מתקיים מאליו כמה

טענה חשובה:

$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_k \\ | & & | \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ Av_1 & \dots & Av_k \\ | & & | \end{pmatrix}$ .1

$A\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $C_i(AB) = A \cdot C_i(B)$ מסקנה

$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k$ .2

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{3\times 2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}^{2\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}^{3\times 1} =$$

$$-1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \leftarrow 2 \text{ עמ}$$

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_1+v_2 & v_1+v_2+v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

מסקנה חשובה מאוד: תהי A מטריצה הפיכה

$A = \begin{pmatrix} -v_1- \\ \vdots \\ -v_n- \end{pmatrix}$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} -v_1 B- \\ \vdots \\ -v_n B- \end{pmatrix}$ .1

$B = \begin{pmatrix} -u_1- \\ \vdots \\ -u_k- \end{pmatrix}$ $(x_1 \dots x_n) \cdot B = x_1 u_1 + \dots + x_k u_k$ .2

דוגמא:

$$(1,-1,0)^{1\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{3\times 3} =$$

$$1(1\,0\,0) - 1(0\,1\,3) + 0 = (1\ -1\ -3)$$

תכונות כפל מטריצות

א. $A(B+C) = AB + AC$

ב. $(B+C)A = BA + CA$

ג. $(AB)C = A(BC)$

ד. $(\alpha A)B = A(\alpha B)$

ה. $O^{m\times n} \cdot A^{n\times k} = O^{m\times k}$

הוכחת האסוציאטיביות:

תהיינה 3 מטריצות A, B, C עבורן קיים שהכפל $(AB)C$ מוגדר. אזי גם $A(BC)$ מוגדר, ומתקיים $(AB)C = A(BC)$.

לדוגמה:

$$A^{m\times n} \to B^{n\times k} \qquad (AB)^{m\times k} \to C^{k\times \ell}$$

$$(A(BC))^{m\times \ell}, \quad (BC)^{n\times \ell}, \quad ((AB)C)^{m\times \ell}$$

$A(BC)$ מוגדר כך גם $(AB)C$ מוגדר אזי

ולשניהם גודלים שווים.

נוכיח שלכל $1 \le i \le m$ $1 \le j \le \ell$ מתקיים $\left[(AB)C\right]_{ij} = \left[A(BC)\right]_{ij}$.

①
$$\left[A(BC)\right]_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \cdot (BC)_{pj} =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \left(\sum_{q=1}^{k} b_{pq} \cdot c_{qj} \right) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \cdot \sum_{q=1}^{k} \cdot a_{ip} b_{pq} \cdot c_{qj}$$

②
$$\left[(AB)C\right]_{ij} = \sum_{q=1}^{k} [AB]_{iq} \cdot c_{qj} =$$

$$= \sum_{q=1}^{k} \left(\sum_{p=1}^{n} A_{ip} \cdot B_{pq} \right) c_{qj} =$$

$$= \sum_{q=1}^{k} \cdot \sum_{p=1}^{n} \cdot A_{ip} \cdot B_{pq} \cdot c_{qj}$$

שוויון המשבצות שהתקבל מראה כי מתקיים שוויון בין סדר הסכימה של שני הביטויים.

תזכורת:

אפשר לשמוט את סדר הסכימה כאשר מדובר בסכימה סופית.

שאלה:

יהי מערכת $A\bar{x}=\bar{b}$ ויהיו 2 פתרונות $\bar{v}_1, \bar{v}_2$

האם גם $\bar{v}_1+\bar{v}_2$ פתרון למערכת?

פתרון:

$x+y=1$ $\quad A=(1,1)$ $\quad \bar{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\quad \bar{b}=(1)$ $\quad (1,1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(1)$

פתרונות: $(1,0)$ $(0,1)$

$A\bar{v}_1=\bar{b}$, $A\bar{v}_2=\bar{b}$ $\quad \bar{v}_1+\bar{v}_2=(1,1)$ והוא אינו פתרון של המערכת.

הוכחה פשוטה הכללי:

נראה $A(\bar{v}_1+\bar{v}_2)=\bar{b}$

$A(\bar{v}_1+\bar{v}_2)=A\bar{v}_1+A\bar{v}_2=\bar{b}+\bar{b}=2\bar{b}$ $\quad \bar{b}=2\bar{b}$ $\quad \bar{b}=\bar{0}$

לכן $\bar{v}_1+\bar{v}_2$ פתרון אם ורק אם המערכת הומוגנית.

משפט:

תהי מטריצה A כלשי מהתכונה שלה, וגם אוסף כל הפתרונות של המערכת ההומוגנית שהיא מייצגת, קרוי $A\bar{x}=\bar{0}$ או

$N(A)=\{\bar{v}\ /\ A\bar{v}=\bar{0}\}$

הערה:

תהי מערכת $A\bar{x}=\bar{b}$. יהי $\bar{v}_0$ הפתרון שלה.

$L=\{\bar{v}\ /\ A\bar{v}=\bar{b}\}$

(בדיוק) $L_1=\{\bar{v}_0+\bar{v}\ /\ \bar{v}\in N(A)\}$ אזי $L_1=L$

דוגמא:

$x+y=1$ $\quad (1\ 1\ |\ 1)$ $\quad y=t$ $\quad x=1-t$

$(1-t,t)=(1,0)+t(-1,1)$

↓ פתרון כלשהו

↓ כל פתרון של המערכת ההומוגנית

$x+y=0$ $\quad y=t$ $\quad x=-t$

$(-t,t)=t(-1,1)$

תזכורת:

נניח L_1 תת מרחב של V. הוכחנו כי:

① $L \subseteq L_1$ ② $L_1 \subseteq L$

① יהי $L_1 \supseteq (\bar{V}_0 + \bar{V})$ אז $\exists L \in (\bar{V}_0 + \bar{V})$ אם $A(\bar{V}_0 + \bar{V}) = \bar{b}$

$$A(\bar{V}_0 + \bar{V}) = A\bar{V}_0 + A\bar{V} = \bar{b} + \bar{0} = \bar{b}$$

② יהי $L \in \bar{V}$ אז $\exists \bar{V} \in L_1$ כאשר שקיים $\bar{U} \in N(A)$ $\bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{U}$ ($\Rightarrow$ ②)

נבחר $\bar{U} = \bar{V} - \bar{V}_0$ לכן ברור $\bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{U}$

נותר להוכיח ש- $\bar{U} \in N(A)$ אז $A\bar{U} = 0$

$$A(\bar{V} - \bar{V}_0) = A\bar{V} - A\bar{V}_0 = \bar{b} - \bar{b} = 0$$

סיכום:

פתרון כללי למערכת $A\bar{x} = \bar{b}$ = פתרון כלשהו למערכת $A\bar{x} = 0$ + פתרון פרטי $A\bar{x} = \bar{b}$

הגדרה:

$A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ (קרא כ- מטריצה מושלמת)

$A^t \in \mathbb{F}^{n \times m}$ t = transpose

A^t מתקבלת ע"י החלפת שורות A בעמודות

$$[A^t]_{ij} = [A]_{ji}$$

דוגמאות:

$$A = (x_1 \dots x_n) \qquad A^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

תכונות:

$$(A^t)^t = A$$

$$(\alpha A)^t = \alpha A^t$$

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

תזכורת – משפט 4:

$A^{m\times n}$, $B^{n\times k}$

$(B^t)^{k\times m}$, $(A^t)^{n\times m}$ ←

$$\left((AB)^t\right)^{k\times m} = \left(B^t\cdot A^t\right)^{k\times m}$$

$i=k \quad m=j$

$$\left[(AB)^t\right]_{ij} = [AB]_{ji} = R_j(A)\cdot C_i(B) =$$

$$= C_i^t(B)\cdot R_j^t(A) =$$

$$(x_1 \dots x_n)\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y_1 \dots y_n)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \star$$

$$= R_i(B^t)\cdot C_j(A^t) = [B^t\cdot A^t]_{ij}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3(B^t) = (1\ 0\ 1)$$

$$C_3(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

דוגמה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$R_i(A \cdot B) = R_i(A) \cdot B \quad (1)$$

$$C_i(AB) = A \cdot C_i(B) \quad (2)$$

$$(x_1 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} -v_1- \\ \vdots \\ -v_n- \end{pmatrix} = x_1v_1 + x_2v_2 \dots x_n \cdot v_n \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n \quad (2)$$

הגדרה:

יהי $n \in \mathbb{N}$ שלם חיובי. מטריצת היחידה $I_n \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מוגדרת ע"י $I_n := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$[I_n]_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$ כלומר

$I_1 = (1)$ $\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:לדוגמה

משפט:

יהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אזי $A \cdot I_n = A$, $I_m \cdot A = A$

סימון:

$e_i = (0,0,\dots,0,\overset{(i)}{1},0,\dots,0)$ $\in \mathbb{F}^n$ הוקטור ה-i

$e_1 = (1,0,0)$ $e_i \in \mathbb{F}^3$

$e_2 = (0,1,0)$

$e_3 = (0,0,1)$

$$I_3 = \begin{pmatrix} -e_1- \\ -e_2- \\ -e_3- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$ נשים לב לזהות

הוכחה:

נניח כי $A \cdot I_n = A$

$A \in F^{m \times n}$, $I \in F^{n \times n}$ ← שייך $AI_n \in F^{m \times n}$ שדע"מ

$$C_i(AI_n) = A \cdot C_i(I_n) =$$

$$= A \cdot e_i = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i = C_i(A)$$

מה נכון עבור i? לכן $A = AI_n$

ההוכחה עבור $A = I_m \cdot A$ דומה ניתן עיי שורות.

מסקנה מההוכחה:

$$A \cdot e_i = C_i(A) \quad , \quad e_i A = R_i(A)$$

שאלה:

האם עבור מטריצה $\neq 0$ יש הפכי?

מה עד שאומר הפכי?

הגדרה:

תהי $A \in F^{m \times n}$ אומרים כי A הפיכה אם קיימות מטריצות B, C

כך ש- $AB = I_m$ $\quad CA = I_n$

שאלה:

אם A הפיכה אל B, C מהשגדרה מקיימת ש- $B = C$ (נמצאן)

ל- A^{-1}.

כלומר ההופכי A^{-1} הוא יחידה!

הוכחה:

נסתכל על $C(AB) = (CA)B$

$$C \cdot I = I \cdot B$$

$$C = B$$

משפט:

אם A הפיכה הוא ריבועית.

טענה:

תהי A הפיכה, אז A^{-1} גם הפיכה ומתקיים $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

$A \cdot A^{-1} = I$, $A^{-1} \cdot A = I$

שימו לב שהופכי של A^{-1} הוא A.

טענה:

אם A, B הפיכות אז המכפלה AB מוגדרת גם היא הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

הוכחה:

נזכור שהגדרה של הפיכות היא:

$\blacktriangle = \square^{-1}$ אם $I = \blacktriangle \cdot \square \wedge I = \square \cdot \blacktriangle$

$AB \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1}$

$A \cdot A^{-1} = I$

$I = I$

שאלה:

מצאו מטריצה שאפס אינה הפיכה.

(שוויים כי A, B מתקיים אפס אם $A \cdot B = 0$ אפס $A \neq 0 \vee B \neq 0$)

הוכחה:

נניח בשלילה ש A הפיכה כאשר $A \cdot B = 0$ וגם $A \neq 0$ $B \neq 0$

נכפיל ב משמאל ב- A^{-1} $A \cdot B = 0 \;/\; A^{-1} \cdot ()$

$B = A^{-1} \cdot AB = A^{-1} \cdot 0$

$B = 0$ $\blacktriangleleft$ סתירה לכך ש $B \neq 0$

שגוי B לא הפיכה, הוכחה דומה.

דוגמא:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ A, B מתקיים אפס אינן הפכיות.

$A \cdot B = 0$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אין תיקון תלוי

טענה:

אם ל-A יש שורת אפסים אז גם ל- $\underline{AB}$ יש שורת אפסים

הוכחה:

נניח $R_i(A) = 0$

$R_i(AB) = R_i(A) \cdot B = 0 \cdot B = 0$ ברור $R_i(AB) = 0$

קיבלנו שאותה שורה ב A תהיה שהתאפס ב- AB

מסקנה:

אם ל-A יש שורת אפסים, היא אינה הפיכה

הוכחה:

נניח בשלילה ש- A הפיכה $A \cdot A^{-1} = I$, $R_i(A) = 0$

אזי ל I יש שורת אפסים, אך ראינו כי בכל שורה יופיע 1 באלכסון.

שאלה:

נניח A אינה הפיכה. האם יש ל A בהכרח שורת אפסים?

לאו דווקא!!

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

משל $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ אינה הפיכה כי מתקבל אפס.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הגדרה:

תהי f פעולה שורה אלמנטרית.

כמו כן: $f(A)$ את המטריצה המתקבלת מהפעלת הפעולה f על המטריצה.

אזי $f(I)$ נקרא מטריצה פעולה אלמנטרית או בקצרה: מטריצת פעולה.

דוגמא:

f: $R_1 = R_1 - 2R_2$

$$f(I_2) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצת הפעולה

דוגמא:

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}=$$

$$\rho\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2d&b+2e&c+2f\\d&e&f\end{pmatrix}$$

פעולה הכפלת מטריצה בפעולה בצורה של מטריצה

טענה:

יהי ρ פעולה שורה ותהי A מטריצה אזי $\rho(I)A=\rho(A)$ ① ואם $\rho(I)$ ② הפיכה

הוכחה:

③ נניח שהפעולה השורה $\rho: R_i=\alpha R_i$ אזי

$$\rho(I)=\begin{pmatrix}-e_1-\\-\alpha e_i-\\-e_n-\end{pmatrix}$$

$\rho(I)A=\rho(A)$ אזי $i\neq j$ לכל

$$R_j(\rho(I)A)=R_j(\rho(I))\cdot A=e_jA=R_j(A)$$

$$R_i(\rho(I)A)=\alpha\cdot e_i\cdot A=\alpha\cdot R_i(A)$$

פעולה השורה ה-i נכפלה ב-α

דוגמא:

$$\rho:R_3=4R_3$$

$$\rho\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\4g&4h&4I\end{pmatrix}$$

④ נניח כי $\rho(I)$ הפיכה

פעולה $I=(\rho(I))^{-1}\rho$

אופן שבפעולה פעולה שורה קיים פעולה במטריצה הפעולה

$$I=(\rho(I))^{-1}\rho(I)=\rho^{-1}(I)\cdot\rho(I)$$

כלומר, $I=(\rho^{-1}(I))\rho=\rho^{-1}(I)\cdot\rho(I)$

$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ הפיכות אז A, B תזכורת: אם

נשלח את $E_1 \dots E_k$ הפיכות

$(E_1 \cdot E_2 \dots E_k)^{-1} = E_k^{-1} \dots E_1^{-1}$

מסקנה:

תהי A נסמן ב- $CF(A)$ את הצורה הקנונית של A

קיימות מטריצות הפיכות $(E_1 \dots E_k)$ אלמנטריות כך ש- $CF(A) = E_k \dots E_1 \cdot A$

בפרט $CF(A) = PA$ כאשר P הפיכה.

משפט:

A הפיכה, אז A רציונלית.

הוכחה:

נניח ש- A הפיכה. נניח בשלילה ש A אינה רציונלית. $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$

נבחר מהשורה ש- $m < n$

כיוון שיש יותר שורות מעמודות בצורה הקנונית של A יש שורה אפסים

אחרת בכל שורה יש איבר פותח ולפחות אחד שבו בפתח נמצא מימין

ממש למי שמעליו.

קיימת P הפיכה כך ש- $CF(A) = PA$

P הפיכה, A הפיכה אזי התמפה הפיכה

אזי $CF(A)$ הפיכה בהכרח, כי בהפיכה אין שורת אפסים.

כעת נניח כי $m < n$

$A \cdot A^{-1} = I_m$ $A^{-1} \cdot A = I_n$ $A^{-1} \in \mathbb{F}^{n \times m}$ $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$

לפי הנחת שלילה A^{-1} הפיכה אפשר ל A^{-1} יש יותר שורות מעמודות

בסתירה

מסקנה:

אם A הפיכה, אז A רציונלית, ומתקיים $A, A^{-1} \in \mathbb{F}^{n \times n}$

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

משפט:

תהי $A \in F^{n\times n}$ אזי A הפיכה $\leftrightarrow$ $CF(A) = I$

הוכחה:

$\leftarrow$ נתון ש- A הפיכה ו"ש $CF(A) = I$

A הפיכה לפי הגדרה.

לפי $CF(A)$ הינו I אלו שיש בה שורות באפסים

אלא אחת ש בה שורת אפסים A אינה הפיכה סתירה לנתון.

$\rightarrow$ נתון $CF(A) = I$ ו"ש A הפיכה

ק"ל P הפיכה כך ש- $PA = CF(A)$ / $\cdot (P)^{-1}$ (מאחר כי P הפיכה)

$A = P^{-1}$ לפי A הפיכה $A \cdot I = I \cdot P^{-1}$

משפט:

תהי A מטריצה ריבועית אזי מטריצה B

כך ש- $I = B \cdot A$ אזי A הפיכה ו- B ההופכית של A

הוכחה:

נניח בשלילה ש- A אינה הפיכה לפי ה- $CF(A)$ יש שורת אפסים
כי A ריבועית

ק"ל P הפיכה כך ש- $PA = CF(A)$

$AB = I$ / $\cdot P$

$$PB = \underbrace{CF(A)}_{\text{יש שורת אפסים}}$$

$PB =$ יש שורת אפסים

יש שורת אפסים יש שורת אפסים סתירה ל P הפיכה.

לכן $I = A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}$ ומכאן יש להפכית יחידה $B = A^{-1}$

מסקנה:

תהי A ריבועית ו- B כך ש- $BA = I$ אזי A הפיכה

ו- $B = A^{-1}$

הוכחה:

כיון A ריבועית ו- $BA = I$ אז B ריבועית

לפי משפט קודם B הפיכה $B^{-1} = A$

לכן $A = (B^{-1})^{-1} = B$ הפיכה

דוגמא:

תהי A כך ש $(A+I)^2=0$ (A ריבועית)

הוכיחו כי A הפיכה ומצאו את A^{-1}

$$(A+I)(A+I)=A^2+IA+AI+I^2=$$

$$=A^2+2A+I=0$$

$$A^2-2A=I$$

$$I=A(-A-2I)$$

לפי המשפט $A^{-1}=-A-2I$ כי A ריבועית

דוגמא:

$A\in F^{2\times 3}$ $\quad B\in F^{3\times 2}$ $\quad AB=I$ $\quad A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

משפט:

תהיינה A,B כך שהמכפלה AB מוגדרת A,B ריבועיות

אזי AB הפיכה $\leftrightarrow$ A הפיכה ושם B הפיכה

הוכחה:

$\rightarrow$ נניח ש A,B הפיכות אזי AB הפיכה (כפרד הוכחנו)

$\leftarrow$ נניח ש- AB הפיכה אזי A הפיכה ושם B הפיכה.

$AB\cdot C=I$ $\leftarrow$ $A\cdot BC=I$ אזי A הפיכה

$C\cdot AB=I$ $\leftarrow$ $CA\cdot B=I$ אזי B הפיכה

כי נניח A,B ריבועיות לפי המשפט הנ"ל מתקיים A,B הפיכות.

תזכורת

בנוסף פעולה שנוכל (נרצה) שקול לכפל במטריצה היא פעולה

מסקנה - אלגוריתם לחישוב A:

$$(A \mid I) \rightarrow (I \mid A^{-1})$$

נבדוק האם המטריצה הצליחה, אם (כלומר) אפסים על A, אז A אינה הפיכה אחרת $I = CF(A)$

$$(A \mid I) \rightarrow (PA \mid PI) = (I \mid P) = (CF(A) \mid P) = CF(A) = PA = I$$

כאשר $P = A^{-1}$

מסקנה:

תהי A מטריצה הפיכה B כפולה עם אותו מס' שורות כמו A

$$(A \mid B) \rightarrow (I \mid A^{-1}B) \quad (\rightarrow = \text{כלים קלים})$$

לדוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (A \mid B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

מרחבים וקטוריים

הגדרה:

יהי הקבוצה V ויהי שדה $\mathbb{F}$

V נקרא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, אם מתקיים עליו 2 הפעולות: חיבור וכפל בסקלר, ומתקיימות התכונות הבאות:

1. **סגירות:**

$\forall v_1, v_2 \in V$ מתקיים $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $v_1 + v_2 \in V$ $\alpha v_1 \in V$

2. **חילוף:**

$\forall v_1, v_2 \in V$, $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

3. **אסוציאטיביות:**

$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$, $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$

4. **נייטרל לחיבור:**

קיים $0_V \in V$ כך שלכל $v \in V$ $v + 0_V = v$

5. **איברים נגדיים:**

לכל $v \in V$ קיים $-v \in V$ כך ש- $v + (-v) = 0_V$

6. **חוק הפילוג:**

$\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$ ו $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$

7. **נייטרל לכפל בסקלר:**

$1_{\mathbb{F}} \cdot v = v$

תכונה של מרחב וקטורי:

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ יהי $v \in V$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$ אזי:

$\alpha \cdot v = 0_V \iff \alpha = 0_{\mathbb{F}}$ או $v = 0_V$

הוכחה:

$\leftarrow$ ברור $\alpha = 0_{\mathbb{F}}$ או $v = 0_V$ נתון $\alpha \cdot v = 0_V$

תכונה של מחיר וקטורי:

יהי V מ"ו נצ"ש שדה F

יהי $V \in V$ ויהי $\alpha \in F$ צ"ל:

$\alpha \cdot V = 0_F \Leftrightarrow \alpha = 0_F$ או $V = 0_V$

הוכחה:

$\leftarrow$ נניח $\alpha = 0_F$ או $V = 0_V$ צ"ל $\alpha V = 0$

אם $\alpha = 0_F$:

$$\alpha V = 0_F V = (0_F + 0_F)V = 0_F V + 0_F V$$

$$/ - 0_F V \quad 0_F V = 0_F V + 0_F V$$

$$0_F V = 0_F + 0_F = 0_F$$

אם $V = 0_V$:

$$\alpha \cdot V = \alpha \cdot 0_V = \alpha(0_V + 0_V) = \alpha 0_V + \alpha 0_V$$

שזה בדיוק הגדרה - $0_V = \alpha 0_V$

$\rightarrow$ נניח $\alpha \cdot V = 0_V$ צ"ל $\alpha = 0_F$ או $V = 0_V$

אם $\alpha = 0_F$ סיימנו

אחרת $\alpha \neq 0_F$ לכן קיים $\alpha^{-1} \in F$

$$/ \cdot \alpha^{-1} \quad \alpha \cdot V = 0_V$$

$$(\alpha^{-1} \cdot \alpha) V = 1_F V = V = 0_V$$

$$\alpha^{-1}(\alpha V) = \alpha^{-1} 0_V = 0_V$$

מש"ל

דוגמא:

יהי $V \in V$ הוכיחו כי $-V = (-1) \cdot V$

אופרטורים

A, B מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה

$T: A \to B$ יהי

$$T(v_1+v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$
$$T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v)$$

דוגמאות למרחבים וקטוריים

1. $V = \mathbb{F}^{n \times n}$ מעל שדה $\mathbb{F}$
2. $V = \mathbb{F}^n$ מעל שדה $\mathbb{F}$
3. $V = \mathbb{F}_n[x]$ פולינומים מדרגה קטנה או שווה ל-n עם מקדמים מ-$\mathbb{F}$

מעל שדה $\mathbb{F}$

$$\mathbb{F}_n[x] = \left\{ a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n \;\middle|\; \forall i : a_i \in \mathbb{F} \right\}$$ נאמר

חיבור:

$$(a_0 + b_0 + \dots + a_n x^n + b_n x^n) = (a_0 + \dots + a_n x^n) + (b_0 + \dots + b_n x^n)$$

כפל בסקלר:

$$\alpha(a_0 + \dots + a_n x^n) = \alpha a_0 + \dots + \alpha a_n x^n$$

דוגמא:

נתון $V = \mathbb{R}_3[x]$ מעל $\mathbb{R}$

$$v_1 = 1 + x \in V \qquad v_2 = -x + x^2 + x^3 \in V$$
$$(v_1 + v_2) = 1 + x^2 + x^3 \in V \;, \quad 3v_1 = 3 + 3x \in V$$

בורא רישום שניה פולינומים (וקטור מקדמים)

$$v_1 = 1 + x \to (1, 1, 0, 0)$$
$$v_2 = -x + x^2 + x^3 \to (0, -1, 1, 1)$$
$$v_1 + v_2 = 1 + x^2 + x^2 \to (1, 0, 1, 1)$$
$$3v_1 = 3 + 3x \to (3, 3, 0, 0)$$

3/8 תרגול:

4. $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ מעל $\mathbb{R}$

$f = \cos(x)$ $\quad g = \sin(x)$

$3f = 3\cos(x)$ $\quad f+g = \cos(x)+\sin(x)$

5. $V = \mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{R}$

$V \not\subseteq \mathbb{R}^n$ מעל $\mathbb{R}$ אך לכל n מתקיים כי אין מספרים

$i(1,1) = (i,i) \notin \mathbb{R}^n$

תזכורת:

$V = \mathbb{F}$ מעל $\mathbb{F}$

$V_1, V_2 \in F$ אזי:

$V_1 - V_2 \in \mathbb{F}$ $\quad \alpha \in \mathbb{F}$ $\quad \alpha V_1 \in F$

דוגמאות: $\mathbb{R}^2$ מעל עצמו

$(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$

$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$

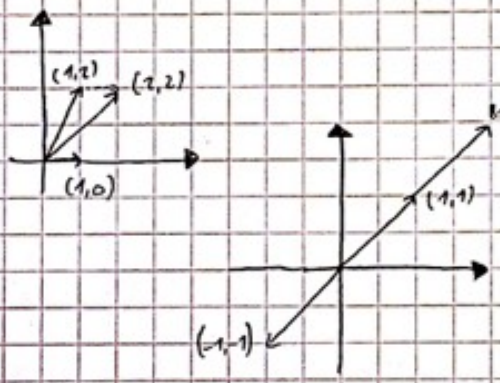
$\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$

$(1,0)+(1,2) = (2,2)$

$2(1,1) = (2,2)$

$-1(1,1) = (-1,-1)$

(בהשוואה לתוספת שנעשתה בהמשך)

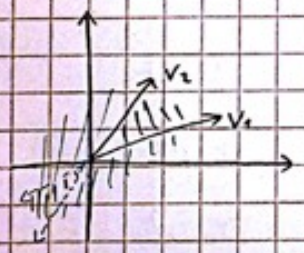


שאלות מחשבה:

1. יהי $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^2$ כמו בציור

נבנה כל הקומבינציות מהצורה $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2$

מה נקבל? נקבל את $\mathbb{R}^2$



2. מה ההבדל בין 2 משולחים הנמצאים במישור הנמצאים ב- $\mathbb{R}^2$?

יתכן שיהיה במישור הפרים

$$U = \{(a,b,0,0) / a,b \in \mathbb{R}\}$$

$$U \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad U = \{a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0)\}$$

$$W = \{(b,0,a,b)\} \qquad U \cap W = \{(0,0,0,0)\}$$

הגדרה:

יהי V מ"ו מעל IF ותהי $V \supseteq U$ אזי

U נקרא תת מרחב של V אם הוא מ"ו ביחס לפעולת

החיבור והכפל בסקלר של V

משפט:

יהי V מרחב וקטורי מעל IF, ויהי $V \supseteq U$ אזי

U הוא תת מרחב של V אם ורק אם מתקיימים התנאים הבאים:

① $0_V \in U$

② לכל $u_1, u_2 \in U$ ולכל $\alpha \in IF$ מתקיים $u_1 + \alpha u_2 \in U$

הוכחה:

$\leftarrow$ נניח U הוא תת מרחב של V ונוכיח טענות 1,2.

הוכחת ה-2:

יהיו $u_1, u_2 \in U$ ו $\alpha \in IF$ אז $u_1 + \alpha u_2 = u \in U$

(U מ"ו קיימת סגירות) $\alpha u_2 \in U$

לכן $u_1 + \alpha u_2 \in U$ כי U מ"ו וקיימת בו סגירות.

הוכחת ה-1:

U מ"ו לכן קיים בו איבר ניטרלי $0_U \in U$

① $0_U \cdot u \in U$ ② $0_U + 0_U = 0_U$ $0_V = 0_U$

$\rightarrow$ יהי V מ"ו מעל IF כך ש $U \subseteq V$, המקיימת ב' התנאים

הבאים שהוכחנו מקיים:

תחי, אסוג, פעיל, קיים (ניטרלי, כפל בסקלר.

נוכיח שהגדרות סגירות וקיום איברים נגדיים

יהיו $u_1, u_2 \in U$ אז $u_1 + u_2 \in U$ (בפרט $\alpha = 1$) $1u_2 = u_2$

לכן $u_1 + u_2 = u_1 + 1 \cdot u_2 \in U$

יהי U תת מרחב של V ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$ ו $u \in U$

אז $\alpha u \in U$

$u_1 = 0_V$, $\alpha = \alpha$, $u_2 = u$

$0_V + \alpha u = \alpha u \in U$

יהי $u \in U$ ונניח שקיים $-u \in U$

$u_1 = 0_V$ $\alpha = -1$

$0_V + (-1)u = -u \in U$

דוגמא נגדית:

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ו $U = \{0_V\}$ תת מרחב של V כך ש $U \subseteq V$

1. $0_V \in U$

2. יהיו $u_1, u_2 \in U$ ו $\alpha \in \mathbb{F}$ אז $u_1 + \alpha u_2 \in U$

אכן: $u_1 = u_2 = 0_V$

אבל: $u_1 + \alpha u_2 = 0_V + \alpha \cdot 0_V = 0_V \in U$

הקבוצה הריקה שונה מ-V אינה תת מרחב כי $0_V \notin \emptyset$

דוגמאות:

$V = \mathbb{R}^4$ $U = \{(a, b, 0, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

1. $(0,0,0,0) \in U$ $a = b = 0$

2. יהיו $u_1, u_2 \in U$ ו $\alpha \in \mathbb{R}$ אז $u_1 + \alpha u_2 = U$

$u_1 \in U$ לכן קיימים $a_1 b_1 \in \mathbb{R}$ כך ש $u_1 = (a_1, b_1, 0, 0)$

באופן דומה $u_2 = (a_2, b_2, 0, 0)$

$u_1 + \alpha u_2 = (a_1 + \alpha a_2, b_1 + \alpha b_2, 0, 0) \in U$

הגדרה מרחב האפסים:

תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ נסמן ב-

$$N(A) = \{\bar{x} \in \mathbb{F}^n \mid A\bar{x} = \bar{0}\}$$

$N(A) =$ מרחב ה-0 של A

צ"ל: $N(A)$ הוא תת מרחב של $\mathbb{F}^n$

הוכחה:

1. צ"ל $\bar{0}_{\mathbb{F}^n} \in N(A)$ כי $A\cdot\bar{0} = \bar{0}$

מהגדרה $\bar{0}_{\mathbb{F}^n} = \bar{0}$

2. יהי $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in N(A)$ $\alpha \in \mathbb{F}$ צ"ל $\bar{x}_1 + \alpha\bar{x}_2 \in N(A)$

כלומר $A(\bar{x}_1 + \alpha\bar{x}_2) = \bar{0}$

$$A(\bar{x}_1 + \alpha\bar{x}_2) = A\cdot\bar{x}_1 + \alpha(A\bar{x}_2) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$

דוגמא:

תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ נסמן באופן הבא שזה מערכת של המשוואות

$$L = \{\bar{x} \in \mathbb{F}^n \mid A\bar{x} = \bar{b}\} \quad \bar{b} \neq \bar{0}$$

האם L הוא תת מרחב של $\mathbb{F}^n$?

לא! $\bar{0} \notin L$ כי $A\cdot\bar{0} = \bar{0} \neq \bar{b}$

(באופן דומה, כל מישור שלא עובר בראשית, אינו תת מרחב וקטורי)

דוגמא:

נסמן ב- $GL_n(\mathbb{F})$ אוסף כל המטריצות ההפיכות מסדר $n\times n$ מעל $\mathbb{F}$.

האם $GL_n(\mathbb{F})$ הוא תת מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$?

כלומר, האם $\bar{0}_{n\times n} \in GL_n(\mathbb{F})$ כי אינה הפיכה.

דוגמא:

נסמן ב- $S \subseteq \mathbb{F}^{2\times 2}$ אוסף המטריצות הבאות מהסוג.

האם S הוא תת מרחב?

1. $S \ni \bar{0}_{2\times 2}$

2. יהיו $A, B \in S$ $\alpha \in \mathbb{F}$ צ"ל $A + \alpha B \in S$

אך אפשר למצוא דוגמא נגדית כי I אינו בסוגה הנ"ל

$$I = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \notin S$$

יהי V מ"ו ויהיו $U,W \subseteq V$ תת מרחבים

1. האם $U \cup W$ תת מרחב?
2. האם $U + W$ תת מרחב?

משפט:

$U,W \subseteq V$ תת מרחבים אזי $U \cap W$ תת מרחב.

הוכחה:

1. נבדוק $0_V \in U \cap W$

יהי $0_V \in U$ ו $0_V \in W$ כי U,W תת מרחבים

נרצה שיתקיים $0_V \in U \cap W$

2. יהיו $v_1, v_2 \in U \cap W$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$ נבדוק $v_1 + \alpha v_2 \in U \cap W$

$v_1, v_2 \in U$ לכן $v_1 + \alpha v_2 \in U$

$v_1, v_2 \in W$ לכן $v_1 + \alpha v_2 \in W$

ולכן $v_1 + \alpha v_2 \in U \cap W$ משל!

דוגמאות:

$U = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

$W = \{(0,a) \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$U \cap W = \{(0,0)\} =$ תת מרחב

האם $U \cup W$ תת מרחב?

$U = (1,0)$ $W = (0,1)$ $U + W = (1,1)$

$U, W \in U \cup W$ אולם $U \cup W \not\ni (U+W)$

משפט:

יהי V מ"ו ויהי $\dim V \geq m, n$ שני מרחבים אלו:

$m \cap n$ הוא מרחב של V $\Leftrightarrow$ $m \subseteq n$ או $n \subseteq m$

$\rightarrow$ נניח $m \subseteq n$ או $n \subseteq m$

אזי $m = m \cap n$ או $n = m \cap n$

לכן $m \cap n$ הוא מרחב כי m, n הם שני מרחבים.

$\leftarrow$ נניח $m \cap n$ הוא מרחב בפ $m \subseteq n$ או $n \subseteq m$

נניח בשלילה ש- $m \not\subseteq n$ וגם $n \not\subseteq m$

לכן ק"י $n \in n$ כך ש- $m \notin n$

וקיים $m \in m$ כך ש- $n \notin m$

$m \cap n \in m, n$, $n \cap m$ הוא מרחב לכן $m + n \in$

לכן $n \in m + n$ או $m \in m + n$

אזי $n \in m + n$ כלומר $n \in n$

לכן $n \in n - m + n = m$ $\leftarrow$ סתירה!

אזי $m \in m + n$ מגיעים לסתירה בשלבון בומה.

מה נעשה כשנרצה את המרחב הנקבע ביותר הינק את n וגם את m

הוכחה:

יהי V מ"ו $\dim V \geq m, n$ שני מרחבים

$m + n = \{m \in m, n \in n / m + n\}$

עזרה: $m + n$ הוא מרחב שמכיל את m, n.

הגדרה:

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$

יהיו $U, W \subseteq V$ תתי מרחבים

$U + W = \{ u + w \mid u \in U, w \in W \}$

נקרא כך אם מרחב ומתקיים $U + W \subseteq M, U$

כלומר כך, אם $V \supseteq T$ הוא מרחב וכך $T \supseteq M, U$

אז גם $T \supseteq U + W$

אומרים עבור $U + W$ הוא המרחב "הקטן ביותר" שמכיל את U ואת W

דוגמא:

$V = \mathbb{R}^2$ $\quad U = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ $\quad W = \{(0,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

$U + W = \{(a,0) + (0,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 = V$

הגדרה:

יהי V מ"ו ויהיו $U, W \subseteq V$ ת"מ. נאמר ש $V = U \oplus W$

(או שסכום הישר בין U ל W) אם:

1. $V = U + W$
2. $U \cap W = \{0_V\}$

דוגמא:

$U = \{(a,0)\}$ $\quad W = \{(0,a)\}$ $\quad U + W = \{(a,b)\} = \mathbb{R}^2$

$U \cap W = \{0_V\}$ $\quad$ לכן $\quad V = U \oplus W$

משפט:

יהי V מ"ו ויהיו U, W ת"מ. $\quad V = U \oplus W$ אם ורק אם

לכל $v \in V$ קיימים $u \in U$, $w \in W$ יחידים כך ש-

$v = u + w$

U נקרא המרכיב של V ב- U

W נקרא המרכיב של V ב- W

תזכורת:

$\Rightarrow$ נניח שעל V קיים הפרד יחידה U ו $U \in \mathcal{U}$, $W \in \mathcal{W}$

$V = U_1 + W_1$ ע"י $V = W \oplus U$

① ע"י $V = W + U$ ② $W \cap U = \{0\}$

① ע"י $V \supseteq W + U$ מאחר ומדובר ב

ע"י $W + U \subseteq V$ וכי $W + U \in \mathcal{V}$ ע"י

יהי $W \in \mathcal{W}$, $U_1 \in U$ קיימים כך ש- $V = W + U_1$

לכן $W + U \in \mathcal{V}$

② נוכיח כי $W \cap U \subseteq \mathcal{O}_V$ שכן לפחות $\mathcal{O}_V$

נניח בשלילה ש- $W \cap U \neq \mathcal{O}_V$ לכן קיים $\bar{X} \neq \mathcal{O}_V$ כך ש- $\bar{X} \in W \cap U$

$\bar{X} \in \mathcal{V}$ $\bar{X} \neq \mathcal{O}_V$ אז כך ש- $\bar{X} \neq \mathcal{O}_V$

$\bar{X} \in W$ $\bar{X} \in U$

$\mathcal{O}_V \neq \bar{X}$ לכן מאידך ההפרש שווה, סתירה כי נתון שהוא יחידה.

לכן $W \cap U = \{0\}$

$\Leftarrow$ נתון $V = W \oplus U$ ע"י שלכל $V \in \mathcal{V}$ קיים הפרד יחידה

$V = U_1 + W_1$ $W \in W$, $U \in U_1$

יהי $V \in \mathcal{V}$ לכן $W + U \in \mathcal{V}$

לכן קיימים $U_1 \in U$, $W \in W$ כך ש- $V = U_1 + W_1$

נניח ש- $W \in W_2$, $U \in U_2$ כך ש- $V = U_2 + W_2$

ע"י $U_1 = U_2$ ו $W_1 = W_2$

$U_1 - U_2 = W_2 - W_1 \in W \cap U$ $\leftarrow U_1 + W_1 = U_2 + W_2$

לכן $W \cap U \ni (U_1 - U_2), (W_2 - W_1)$ אלא $W \cap U = \{0\}$

לכן $U_1 = U_2$ $U_1 - U_2 = \mathcal{O}_V$

כלומר כן $W_1 = W_2$ $W_2 - W_1 = \mathcal{O}_V$ **מ.ש.ל**

בירופים

הגדרה:

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי S, $S \subseteq V$. קבוצה S נקראת בירוף לינארי של וקטורים ב-S אם קיימים מס' סופי של וקטורים $v_1 \dots v_k \in S$ וקיימים $\alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{F}$ כך ש- $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$

הערה: הגדרנו קבוצה וקטורים הינו סופי, אך ניתן להרחיב את ההגדרה לאינסופי כאשר הסכום אינסופי יהיה מאופס חוץ ממספר {} סופי של איברים.

משפט: תהי S קבוצה של וקטורים ב-V ויהי $v \in V$ וקטור נתון. v הוא בירוף לינארי של S אם"ם קיימים $v_1 \dots v_k \in S$ וקיימים $\alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{F}$ כך ש- $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$

דוגמא:

$S = \{(1,0)\}$

$(2,0)$ הוא בירוף לינארי של S כי $(1,0) \cdot 2 = \alpha_1 \cdot v_1$

$(1,0)$ " " " " " $(1,0) \cdot 1 =$ "

$(0,0)$ " " " " " $(0,0) \cdot 0 =$ "

הערה לסדרה:

וקטור האפס שהוא בירוף לינארי של $\emptyset$ (0_V)

אם S לאו דווקא בת"ס, הכוונה ב-a_0 בירוף לינארי שלה $(\alpha = 0)$

דוגמא:

$S = \{1, x\} \subseteq \mathbb{R}_1[x]$

$x+1$ בירוף לינארי של S

מהי קבוצה כל הבירופים הלינאריים של S?

$\mathbb{R}_1[x] - \{a \cdot 1 + bx \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

דוגמא:

$S = \{1-x, x-x^2\}$ $V = R_2[x]$

$1-x^2$ בירוף לינארי של S $\quad 1 \cdot (1-x) + (x-x^2) \cdot 1$

$x^2 - x + 1$ אין בירוף לינארי של S כי:

האם קיימים α_1, α_2? $\alpha_1(1-x) + \alpha_2(x-x^2) = \alpha_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)x - \alpha_2 x^2 = 1 - x + x^2$

$\alpha_1 = 1$ $\quad \alpha_2 \neq 1$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ סתירה ← אין פתרון

$\alpha_1 - \alpha_2 = 1 \rightarrow$ $\alpha_2 = 0$

תזכורת:

יהי V מ"ו ותהי $S \subseteq V$ אז

$$\text{span}(S) = \{ \text{צ"ל הינם ש } S \text{ צ"ל} \}$$

$\text{span}(S)$ הוא קבוצת כל הקלורים שניתן ליצור משילובי S

הגדרה:

יהי V מ"ו ותהי $S \subseteq V$

S נקרא תלוי לינארית אם קיימים $v_1, \dots, v_k \in S$ שונים

וקיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in F$ כך ש $\alpha_i \neq 0$ קיים i

כך ש- $0_V = \alpha_k v_k + \dots + \alpha_1 v_1$

קיים צירוף לינארי לא טריוויאלי שמאפס.

מסקנה:

כל קבוצה שמכילה את 0_V היא תלוי

הוכחה:

$0_V \in S$ $\quad 1 \cdot_F 0_V = 0_V$ $\quad \alpha_1 = 1 \neq 0$

דוגמה:

$$S = \{(1,-1,0,0),(1,0,1,0),(0,1,1,0)\}$$

האם S בת"ל?

שקול: האם הווקטורים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ קיים כאלה שמתקיים

$$\alpha_1(1,0,1,0) + \alpha_2(0,1,1,0) + \alpha_3(1,-1,0,0) = (0,0,0,0)$$

האם קיים פתרון פרט לפתרון הטריוויאלי ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$)

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר שעבור $A\bar{x} = 0$ ...

- כאשר שעבור ווקטורים מצומצמת, הם בת"ל אם ורק אם יהיו משתנים חופשיים
- אם שעבור ווקטורים בשורות הם בת"ל אם ורק אם יש שורות אפסים

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

יש משתנה חופשי, לכן אינסוף פתרונות, לכן בת"ל.

הגדרה:

אם S אוסף וקטורים ו-S בת"ל (בלתי תלויה לינארית)

משפט:

יהי V מ"ו ויהי $V \supseteq S$ אז שלושת התנאים הבאים שקולים:

① S בסיס

② S קבוצה פורשת מינימלית ביחס להכלה

③ S קבוצה בת"ל מקסימלית ביחס להכלה

(אפשר קצת יותר מזה)

הוכחה:

נוכיח ש- ① $1 \to 2$, ② $2 \to 3$, ③ $3 \to 1$

① נניח ש-S בסיס ונראה שהוא פורשת מינימלית.

קיימים $v_1 \dots v_k \in S$ וקיימים $\alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{F}$ כך ש- $\alpha_1 \neq 0$

(אחרת נשלח את v_1 מצד ימין של α), כך ש- $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$

נשים לב ש- $\alpha_1 \neq 0$ ונקבל:

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} v_k \quad \{v_2 \dots v_k\} \text{sp} \in v_1$$

לכן $\text{sp}(S) \subseteq \text{sp}(S \setminus \{v_1\})$

בד"ש

מהשוויון האחרון, הווקטורים $v_1 \dots v_k \in S$ שונים זה מזה $v_1 - v_1 = 0$

② נניח שקיים $S \in v$ כך ש- $\text{sp}(S \setminus \{v\}) \in v$

נבחר $S \in v$ כך ש- $\text{sp}(S \setminus \{v\}) = \text{sp}(S)$

נוכיח שאי אפשר לצמצם את v מתוך S.

$\text{sp}(S) \subseteq \text{sp}(S \setminus \{v\})$ מתקיים.

נראה ש- $\text{sp}(S \setminus \{v\}) \subseteq \text{sp}(S)$

יהי $u \in \text{sp}(S \setminus \{v\})$ אז $u \in \text{sp}(S)$

מצד אחד קיימים $v_1 \dots v_k \in S$ וקיימים $\alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{F}$ כך ש-

$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ אלא אחד $v_i = v$

מצד שני $v \in \text{sp}(S \setminus \{v\})$ לכן קיימים $w_1 \dots w_m \in S \setminus \{v\}$ ו $\beta_1 \dots \beta_m \in \mathbb{F}$ כך ש- $v = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m$

נניח $v_1 = v$ ונציב $u = \alpha_1 (\beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m) + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$

$w_1 \dots w_m, v_2 \dots v_k \neq v$, $u \in \text{sp}(S \setminus \{v\})$

המשך הרצאה:

② $U \in sp(S \setminus \{v\})$ אזי קיים i כך ש- $v = v_i$ אזי $v \in sp(S)$

נניח: קיים S כך ש- $sp(S) = sp(S \setminus \{v\})$ לכל $v \in S$

$v \in S$ ← $v \in sp(S)$ ∴ $v \in sp(S \setminus \{v\})$ ← $v \in S$

לכן קיימים $w_1 \dots w_k \in S \setminus \{v\}$ $\alpha_1 \dots \alpha_k \in F$

כך ש- $v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k$ (הנחה $2 \to 3$)

$v - \alpha_1 w_1 - \dots - \alpha_k w_k = 0$

$v, w_1 \dots w_k$ שונים

מתוך הנחה שלא כל w_i שווה ל- v נקבל ש- S תלויה

(מתקבל גם v הוא w_i ושניהם $\neq 0$)

מסקנה:

יהי V מ"ו מעל F ו- $S \subseteq V$ אזי:

① $sp(S)$ הוא מרחב

② S הוא מרחב U כך $U \subseteq S$ אזי $U \subseteq sp(S)$

(כלומר $sp(S)$ הוא המרחב הקטן ביותר שמכיל את S)

הוכחה:

① א. צ"ל $0_V \in sp(\emptyset)$ ∴

אזי $S \neq \emptyset$ קיים $v \in S$ $0_V = 0_F \cdot v \in sp(S)$

אזי $S = \emptyset$ הגדרנו $0_V \in sp(S)$

ב. יהי $v_1, v_2 \in sp(S)$ ויהי $\alpha \in F$ צ"ל $v_1 + \alpha v_2 \in sp(S)$

קיימים $u_1 \dots u_k \in S$ ו- $\alpha_1 \dots \alpha_k \in F$ כך $v_1 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$

וקיימים $w_1 \dots w_n \in S$ ו- $\beta_1 \dots \beta_n \in F$ כך $v_2 = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n$

$v_1 + \alpha v_2 = \alpha_1 u_1 + \alpha \beta_1 w_1 + \dots + \alpha_k u_k + \alpha \beta_n w_n$

לכן ברור $v_1 + \alpha v_2 \in sp(S)$

(כי $u_1 \dots u_k, w_1 \dots w_n \in S$, $\alpha_1 \dots \alpha_k, \beta_1 \dots \beta_n \in F$)

(עמוד $S = \emptyset$ $sp(S) = \{0\}$ לכן מרחב)

תכונה:

① יהי U מרחב כך ש- $U \subseteq S$ ב"ל $U \subseteq sp(S)$

יהי $V \in U$ ב"ל $V \in sp(S)$

($S \neq \emptyset$, באופן הגיוני קורה $U \subseteq \{0\}$)

קיימים $u_1, \dots, u_k \in S$ $\exists \alpha_1 \dots \alpha_k \in F$

$$V = \alpha_1 u_1 + \dots \alpha_k u_k$$

$U \subseteq S \rightarrow u_1, \dots u_k \in U$ אזי $V \in U$

(מאוד נפוץ ושימושי) **משפט**.

סרטים:

בדיסק אינארי

בדיק אחד מעל וקטורים ← המון וקטורים

רצוים אחסן קבוצה הכוללת מינימום ← בגל

תזכורת

יהי V מ"ו ותהי $V \subseteq S$

S בלתי תלויה לינארית אם קיימים $v_1 \ldots v_n \in S$ שונים $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in F$

שאחד מהם $\neq 0$ שעבורם $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$.

אחרת S תלויה לינארית.

S בלתי תלויה $\leftrightarrow$ קיים $v \in V$ כך ש- $v \in \text{sp}(S \setminus \{v\})$

קיים $v \in V$ כך ש- $\text{sp}(S \setminus \{v\}) = \text{sp}(S)$

אוסף כל הווקטורים שניתן לצור באמצעות S - $\text{sp}(S)$

נאמר אוסף כל הצירופים הלינאריים של S

אומרים ש- S פורשת את V אם $\text{sp}(S) = V$

נניח $A \subseteq V$ בת"ל

ונניח ש- $B \subseteq V$ פורשת את V

במצב כזה יתכן אחרים, אך נניח לפחות $|B| \geq |A|$

למה:

א. יהי V מ"ו ותהי $A \subseteq V$ בת"ל

ויהי $v \in V$ כך ש- $v \notin A$

אז $A \cup \{v\}$ בת"ל $\leftrightarrow$ $v \notin \text{sp}(A)$

ב. יהי V מ"ו ותהי $A \subseteq V$ בת"ל

ויהי $a \in A$ אזי $A \setminus \{a\}$ אינה פורשת את V

כלומר $\text{sp}(A \setminus \{a\}) \neq V$

הוכחה:

$\leftarrow$ א. נניח $A \cup \{v\}$ בת"ל. נניח בשלילה ש- $v \in \text{sp}(A)$ לכן v צירוף

לינארי של וקטורים אחרים $(A \setminus \{v\})$ ולכן $A \cup \{v\}$ ת"ל בסתירה.

$\rightarrow$ נניח ש- $v \notin \text{sp}(A)$ ונ"ל ש- $A \cup \{v\}$ בת"ל. נניח בשלילה ת"ל

קיימים $v_1 \ldots v_n \in A \cup \{v\}$ שונים ויימים $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in F$ לא כולם 0

כך ש- $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$

אם לכל i $v_i \neq v$ אז לכל $v_i \in A$ מאחר שצירוף לינארי

של איברי A שווה לאפס הרי A ת"ל בסתירה, A בת"ל

המשך ההוכחה:

אחרת נניח $V=V_1$

אם $\alpha_1=0$ שזה קיבלנו בדיוק ניגוד לכך שרנק של A

$A\in V_n$ ... V_2 מטענה

אזי $V=V_n=\frac{\alpha_n}{V_{n+1}}-\dots-\frac{\alpha_2}{V_2}-V_1$ אז $\alpha_1\neq 0$

אזי $V\in sp(A)$ מטענה.

ב. נשאר כיון ש-A בת"ל מתקיים ש $A\setminus\{a\}\subseteq A$ בת"ל

$a\notin A\setminus\{a\}$

נניח בשלילה ש- $V=sp(A\setminus\{a\})$

אזי $a\in V$ ולכן $a\in sp(A\setminus\{a\})$

$A=\{a\}\cup(A\setminus\{a\})$ ת"ל (מסעיף ב') סתירה.

שאלת ההוכחה של שרון:

יהי V מ"ו, ותהי $A\subseteq V$ בת"ל

ותהי $V\ni B$ פורשת את V

עבור $a\in A$ קיים $B\ni b$ כך ש- $b\notin A\setminus\{a\}$

וגם $\{b\}\cup(A\setminus\{a\})$ בת"ל

ההוכחה:

נניח בשלילה, שקיים $a\in A$ שעבור $b\in B$, $b\in A\setminus\{a\}$ אז

$\{b\}\cup(A\setminus\{a\})$ ת"ל

נבדוק מה a הזה, ועבור b, אם $b\in A\setminus\{a\}$ אזי $b\in sp(A\setminus\{a\})$

אחרת אם $\{b\}\cup(A\setminus\{a\})$ ת"ל $b\notin A\setminus\{a\}$

עבור אותו a מסעיף ב' מתקיים $b\in sp(A\setminus\{a\})$

מכיוון שעבור $B\ni b$ $sp(A\setminus\{a\})\supseteq B$

ולכן גם $sp(A\setminus\{a\})\supseteq sp(B)=V$

A בת"ל $a\in A$ ולכן $A\setminus\{a\}$ אינה פורשת את V

זה סותר את שלב התחילי, בסתירה.

$sp(A\setminus\{a\})=V$ ← $sp(A\setminus\{a\})\subseteq V$

הגדרה:

מרחב וקטורי V נקרא נוצר סופית אם קיימת B סופית כך ש- $V = sp(B)$

בקורס זה נעסוק ברובו במרחבים נוצרים סופית, אלא אם נאמר אחרת.

משפט:

יהי V מ"ו נוצר סופית.

אם $A \subset V$ בת"ל

ואם $B \subset V$ פורשת כך ש $|B| \geq |A|$ אז A סופית

הוכחה:

נניח בשלילה ש B סופית.

נסמן $n = |B|$ כך ש- $n \leq |A|$

נניח בשלילה ש- $n+1 \leq |A|$

לכן קיימים $a_1 \dots a_{n+1} \in A$ שונים.

מכך שהקבוצה $a_2 \dots a_{n+1}$ בת"ל קיים b_1 כך ש- $b_1 \neq a_2 \dots a_{n+1}$

נסמן $\{b_1, a_2, \dots a_{n+1}\}$ בת"ל

נוסף $\neq$ הוא על a_2 ונקבל $b_2 \neq b_1$ $a_3 \dots a_{n+1} \neq b_2$

$\{b_1, b_2, a_3 \dots a_{n+1}\}$ בת"ל

נוסף את n האיברים ונקבל $\{b_1 \dots b_n, a_{n+1}\}$ בת"ל

כך שהפרוש של B הוא $n = |B|$ $B = \{b_1 \dots b_n\}$

B פורשת לכן $V = sp(B)$

לכן $a_{n+1} \in sp(B)$ לכן $\{b_1 \dots b_n, a_{n+1}\}$ תלוי, בסתירה!

כלומר כיוון ש V נוצר סופית, קיימת $C \subseteq V$ קבוצה סופית

שפורשת את V $|C| \geq |A|$ לכן A סופית

כמו כן B אינסופית מהיות $|B| > |A|$

הגדרה:

יהי V מ"ו מעל שדה A. בסיס של V הוא:

① A בת"ל ② A פורשת את V.

הערות:

- בדרך כלל יש אינסוף בסיסים שונים.
- כאשר V נתון סופית, כל בסיס הוא סופי.

מסקנה:

אם V מ"ו נוצר סופית וי"ה A ו-B בסיסים של V אזי $|A| = |B|$ (אין מושג לאפס!)

הוכחה:

יהי V מ"ו נוצר סופית וי"ה A בסיס של V. נגדיר את המימד של V להיות מס' האיברים בבסיס

$$\dim V = |A|$$

שים ✔:

אם בבסיסים שונים היה מס' שונה של איברים, ההגדרה לא היתה שבה. כמו כן אם הבסיס הוא אינסוף איברים, ההגדרה היא מיותרת.

תרגילים:

מהו הבסיס שמתאים ל-$\emptyset$? $\quad \dots \quad (\{0\}) \to \emptyset$

אזי $\dim\{0\} = |\emptyset| = 0$

הוכחת המסקנה:

A ו-B בסיסים. A בת"ל B פורשת

$|A| \leq |B|$ מצד שני B בת"ל A פורשת $|B| \leq |A|$ מש"ל

מסקנה:

יהי V מ"ו ממימד n ותהי $A \subseteq V$ בת"ל

$B \supseteq A$ פורשת $n \geq |A|$, $|B| \geq n$

תזכורת:

ניקח בסיס C של V $n = |C|$ $n = |C| \leq |A|$

פורשת בת"ל

$|B| \geq |C| = n$

פורשת בת"ל

שאלה:

האם כל מ"ו יש בסיס?

תשובה: כן.

למרות שאין נוסחא אחת שמוכיחה לכל מ"ו בבת אחת, לכל מ"ו נוסחא, התשובה היא כן.

הוכחה:

(יהי V מ"ו נוצר סופית אז קיים ל-V בסיס)

אם $V=\{0_V\}$ אז $\emptyset$ בסיס

אחרת קיים $v \in V$ $v \neq 0_V$

קיימת B סופית כך ש- $V = sp(B)$

$\{v\}$ בת"ל. אם היא פורשת את V מצאנו בסיס וסיימנו.

אחרת קיים v_2 כך ש- $v_2 \notin sp(v)$

לכן $\{v_1, v_2\}$ בת"ל $V \neq v_2$ מתר.

נמשיך בצורה זו שנוצר A בת"ל כך ש- $|A|=|B|$. (זו שנוצרה קודם).

אם $|A|=|B|$ לא (יוצא סתירה בת"ל שנקבל יותר מ- B ב"ל

יש סתם איברים שמבנה פורשים

ע"ז קבוצה לא פרשה את V, ויוצא לסתירה.

לכן אם אי אפשר להמשיך, סימן ש- A פורשת ולכן בסיס.

שאלה:

יהי V מ"ו ותהי $A \subseteq V$

א. אם A הינה מקסימלית (בשונה מ"קבוצה שנשלח אי יותר קטנה ממנה") ביחס ל-V

ב. אם A פורשת - מינימלית (בשונה אם נסיר איבר מ-A היא לא תהיה פורשת) ביחס ל-A

טענה:

א. תהי A הינה מקסימלית כך $\dim(A) = V$

נניח בשלילה $\dim(A) \neq V$ לכן קיים $v \in V$ כך ש- $v \notin A$

לכן $A \cup \{v\}$ הינה בהכרח בלתי תלויה של A.

ב. תהי A פורשת מינימלית כך A הינה

אלא הטענה שאם כל וקטור שנסיר ישנה את התכונה הנפרשת, אזי

A הינה

שאלה:

יהי V מ"ו

א. אם $V \neq \{0\}$ פורשת את V אזי קיים $B \subseteq A$ בסיס

ב. אם $V \neq \{0\}$ הינה אזי קיים $B \subseteq A$ כך ש- $B \subseteq A$

הינה קבוצה הינה, אפשר להשלים לבסיס לחלוטין.

הוכחה:

תהי A פורשת

אם $V = \{0\}$ אזי $\emptyset$ בסיס וכמובן ש- $\emptyset \subseteq A$

אם $V \neq \{0\}$, קיים $v \in V$ $v \neq 0$ $\{v\}$ הינה

אם $\dim(V) \leq \dim(A) \leftarrow \{v\} \subseteq A$

לכן $\dim\{v\} = 1$ ואז $\{v\}$ הינה פורשת ומהווה בסיס

אחרת $\dim\{v\} \neq \dim A$ לכן קיים $v_2 \in V$ כך ש $\{v, v_2\}$ הינה

נמשיך את שלבי הבניה כל עוד אין פרישה סופית

אבריים מקבוצה פורשת, ונוכל לקבל פורשת סופית

הסיבה היחידה שלא נוכל לעשות זאת שקבוצה הינה

פורשת לכן בסיס.

משפט שלוש השקולות

יהי V וו"ס מימד n ותהי $S \subseteq V$

שלוש השקילויות הבאות נכונות, אולם עם השלישי נכון

ושתיים כי S הוא בסיס ל-V

1. S פורש
2. S פורשת את V
3. $n = |S|$

הוכחה:

1,2 ← 3 לפי ההגדרה,

שהרי S פורש את V אז הוא בסיס ולכן $\dim V = |S| = n$

3,1 ← 2

האם יתכן שנוסיף ל-S איבר ונקבל קבוצה בת"ל?

לפי, כי הטענה השקולה של בת"ל תהא n. S בת"ל שמקיימת ולכן בסיס.

2,3 ← 1

וזו אפשר להסיר ממנה $n-S$ ושאלו פורשת כי בכל פרישה יש

לפחות n איברים, לכן S פורשת מינימלית ולכן בסיס

כלל חשוב:

תכונה שאין בין שני מרחבים הקשורים זה בזה ומשלים מימדים.

יהי V מ"ו ויהי $U \subseteq V$ תת מרחב

וגניח $\dim U = \dim V$ אזי $U = V$

הוכחה:

נניח $U \subseteq V$ $\dim U = \dim V$ בת"ל $U = V$

נניח בשלילה ש- $U \neq V$ קיים $v \in V$ כך ש- $v \notin U$

ל-U קיים בסיס $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ $\dim U = n$

$U = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq sp\{u_1, \dots, u_n\} \not\ni v$ לכן $\{v, u_1, \dots, u_n\}$ בת"ל

אבל יש כאן $n+1$ וקטורים בת"ל בקבוצה של $\dim V = n$

מציאת בסיס

כיצד מוצאים בסיס למרחב?

ישנם, כמו תמיד יותר מאשר תשובה אחת נכונה:

I אוסף הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית.

II sp של וקטורים נתונים.

לעתים קרוב יותר מבקשים אותנו לעשות:

<u>דוגמא:</u>

$$U = \{(a,-a) \mid a \in \mathbb{R}\} = sp\{(1,-1)\}$$

$$U = \{(a,b) \mid a-b=0\} \quad (a,b \in \mathbb{R})$$

ראשית נמצא בסיס למרחב שמן במערכת משוואות:

<u>דוגמא:</u>

$$U = \{(x,y,z) \mid \begin{matrix} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{matrix}\} \quad \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$ מרחב של $\mathbb{F}^3$

נפ"מ במערכת שמעלה של מערכת המשוואות ונעבור לצורה מדורגת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}$$

$z=t \quad y=-t \quad x=0$

$(0,-t,t) \leftarrow t(0,-1,1)$

$U = sp\{(0,-1,1)\}$ לכן הפתרון הכללי הוא $\dim U = 1$

$\{(0,-1,1)\}$ בגלל כי קיים $V \neq 0$

ומתוך כך sp שלו שווה לכל הפתרונות של U

לכן $\{(0,-1,1)\}$ בסיס ל- U

<u>דוגמא:</u>

$$x-2y+z=0$$

נשתמש בצורה הפרמטרית של המישור ונמצא בסיס למרחב $U=\{(x,y,z) \mid x-2y+z=0\}$

$(\boxed{1} \ -2 \ 1)$ → מדורג וקנוני $\quad x=2t-s \quad y=t \quad z=s$

לכן פתרון כללי $(2t-s,t,s) = t(2,1,0)+s(-1,0,1)$

$U = sp\{(2,1,0),(-1,0,1)\}$

שאלה:

תמיד קבוצת הפתרונות תהיה בסיס.

ברור למה פרוש את הגדרת מרחב

נסביר מדוע לפי תמיד היא

יהי פרמטרים $t_1, \dots, t_n$ כאשר $v_1 t_1 + \dots + v_n t_n$ הם

שווים לשמאל המשפטים.

נקבל בדרך שנדרוש שמתקיים $t_1 v_1 + \dots + t_n v_n = 0_V$

- לכל שבע $t_i = 0$

כל משתנה חופשי, שזה מתאים ל- t_i

- כאן שבע המשתנים שמתקיים נובע שבע $t_i = 0$

שמזה אינו לשאול בסיס עבור מרחב שאינו מתאים.

ולכן אפשר להבדיל את הדרכים כי קבוצה על בסיס

שמזה אינה שדורה של- I ל- II

אבל שמזה אינה שדורה של- II ל- I

דוגמא:

$$U = sp\{(1,0,1),(1,1,0)\}$$

$(x,y,z) \in U$ אם ורק אם קיימים a,b כך ש

$$a(1,0,1) + b(1,1,0) = (z,y,x)$$

אם ורק אם יש פתרון למערכת:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right)$$

אם ורק אם אין שורת סתירה בצורה המדורגת

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-y-x \end{array}\right)$$

אם ורק אם $z-y-x=0$

המרחב (z,y,x) אם ורק אם

$z-y-x=0$ שוויון $U = \{(x,y,z) \mid z-y-x=0\}$

כעת נמצא בסיס של מרחב הפתרון כי $U = \text{span}$ שווה בהמשך...

מציאת בסיס ל- $U \cap W$:

1. נמצא את $U + W$ בעזרת שיטת
2. $U \cap W$ הוא אוסף הפתרונות שמקיימים את המשוואה של U וגם את המשוואה של W. לכן נוסיף למערכת הזו בסיס

דוגמא:

$$U = \{(a+bx+cx^2) \mid a-b+c=0\}$$

$$W = \{(a+bx+cx^2) \mid a-b-c=0\}$$

$$U \cap W = \{(a+bx+cx^2) \mid \begin{matrix} a-b+c=0 \\ a-b-c=0 \end{matrix}\}$$:נמצא

$t(0,-1,1)$ (פתרון כזה נקרא)

$$a=0 \quad , \quad b=-t \quad , \quad c=t$$

לכן בסיס $U \cap W = \{-x+x^2\}$

תרגול

בסיס: איברים

$\mathbb{F}^n$, $\{e_1, e_2, e_3 \dots e_n\}$ — מימד $= n$

$\mathbb{F}_n[x]$, $\{1, x, x^2, \dots x^n\}$ — מימד $= n+1$

$\mathbb{F}^{n\times m}$ $\left\{\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\ \dots\right\}$ — מימד $= n\cdot m$

$U = sp\{(1,0,1)(0,1,1)(2,3,5)\}$ — המחרים את $(2,3,5)$

בסיס ל-U $(1,0,1)(0,1,1)$ — מימד $= 2$

משפט המימדים:

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהי $U, W \subseteq V$ תתי מרחבים

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

דוגמאות:

$V = \mathbb{R}^4$ $\quad \dim W = 2$ $\quad \dim U = 2$

$U \cap W = \{\bar{0}\}$ $\quad \dim U \cap W = 0$

$\dim(U+W) = 2+2-0 = 4$

$$U+W = \mathbb{R}^4 \begin{cases} U+W \subseteq \mathbb{R}^4 \\ \dim(U+W) = \dim \mathbb{R}^4 \end{cases}$$

הוכחת משפט המימדים:

נבחר בסיס $\{v_1 \dots v_k\}$ ל-$U \cap W$

$U, W \subseteq U \cup W$

נשלים את $\{v_1 \dots v_k\}$ לבסיס ל-U ולבסיס ל-W

בסיס ל-U $\{v_1 \dots v_k u_1 \dots u_\ell\}$

בסיס ל-W $\{v_1 \dots v_k w_1 \dots w_p\}$

נוכיח ש-$\{v_1 \dots v_k, u_1 \dots u_\ell, w_1 \dots w_p\}$ בסיס ל-$U+W$

ואז נסיק $\dim(U+W) = \ell+k+p$

$\dim U = k+\ell$ $\quad \dim W = k+p$ $\quad \dim U \cap W = k$

המשך ההוכחה:

נניח שהקבוצה בסיס ל- $W+U$

נוכיח:

אם $U = sp\ S_1$ $\quad W = sp\ S_2$ $\quad \Leftarrow (S_1 \cup S_2)$ בסיס $= W+U$

אזי $W \cap U = sp\ (v_1 \ldots v_k, u_1 \ldots u_l, w_1 \ldots w_p)$

הוכחה:

נניח שהקבוצה בסיס

יהי 0 צירוף לינארי מאפס

$$0 = \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_p w_p + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_l u_l + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$$

נביע אחרת שבל הסקלרים הם אפס

$$\underbrace{\gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_p w_p}_{\in W} = \underbrace{-\beta_1 u_1 - \ldots - \beta_l u_l - \alpha_1 v_1 - \ldots - \alpha_k v_k}_{\in U}$$

$\in W \cap U$ $\quad$ לכן ניתן לכתוב כצ"ל

של הבסיס המתאים.

היות סקלרים כך ש- $\gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_p w_p = \delta_1 v_1 + \ldots + \delta_k v_k$

$$\bar{0} = \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_p w_p - \delta_1 v_1 - \ldots - \delta_k v_k$$

$\{w_1 \ldots w_p, v_1 \ldots v_k\}$ בסיס לכן בפ"ל $\quad \gamma_1, \ldots \gamma_p = 0$

(הרי שלכל 0 יש צ"ל יחיד שמאפס)

נציב תחזרה את γ ונקבל $\quad \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_l u_l + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$

$\{u_1 \ldots u_l, v_1 \ldots v_k\}$ בסיס לכן בפ"ל

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0 \quad \text{ו} \quad \beta_1 = \ldots = \beta_l = 0$$

מ.ש.ל!

משפט:

יהי V מ"ו מעל F ויהי $B=\{b_1 \dots b_n\}$ בס"ו של V

אזי לכל $v \in V$ קיימת הצגה **יחידה** מהצורה

$v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ כך ש $\alpha_1 \dots \alpha_n \in F$

הוכחה:

נניח $V = sp(B)$ ולכן לכל $v \in V$ מתקיים $v \in sp(B)$

ולכן קיימת הצגה כנ"ל.

נניח ש 2 הצגות:

$v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ ו $v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$

ולכן $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$

$(\alpha_1 - \beta_1) b_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) b_n = 0$

$\{b_1 \dots b_n\}$ בס"ו ולכן בפרט $(\alpha_1 - \beta_1) = \dots = (\alpha_n - \beta_n) = 0$

ולכן $\alpha_1 = \beta_1 \dots \alpha_n = \beta_n$ מ.ל.ש.

דוגמא:

$(1,1) = \alpha(1,0) + \beta(1,1)$

$B = \{(1,0), (1,1)\}$ בס"ו של $\mathbb{R}^2$

לכן לפי המשפט קיימים α, β יחידים כך שמתקיים שוויון

לא קשה לראות ש $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

הגדרה:

אם V מ"ו ויהי $B = \{b_1 \dots b_n\}$ בס"ו של V בס"ו סדור

לכל $v \in V$ קיימת הצגה יחידה $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$

נסמן: $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ הקואורדינטות של v לפי B.

נשים ❤ ל- $[\,]_B : V \to F^n$ כאשר n הממד של V

דוגמא:

$S = \{(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)\}$ בס"ו הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$

יהי $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ $[(a,b,c)]_S = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\leftrightarrow$ $\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1)$

בס"ו סטנדרטי הוא בס"ו שקל מאוד לחשב את הקואורדינטות לפיו.

דוגמא:

$\mathbb{R}_n[x]$ של $S=\{1, x, x^2 \dots x^n\}$ נתון בסיס הסטנדרטי הסדור

יהי $\mathbb{R}_n[x] \ni a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$

$$[a_0+a_1x+\dots+a_nx^n]_S = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ ← המקדמים של

דוגמא:

נתון בסיס הסדור $B=\{(1,1)\ (1,-1)\}$

$a(1,1)+b(1,-1)=(2,1) \Leftrightarrow [(2,1)]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\quad [(2,1)]_S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

אזי:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right)$$

לכן $a=1.5$ $\quad b=0.5$

$$(2,1) = 1.5(1,1)+0.5(1,-1)$$

המשמעות

יהי $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ נקבע $\quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = [(a,b)]_B = ?$

כלומר נמצא את α, β כך ש

$$(a,b) = \alpha(1,1)+\beta(1,-1)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & b-a \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \end{array}\right)$$ ← לכן

$$[(a,b)]_B = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix}$$ ← כפי שקיבלנו

דוגמא חשובה למחשבים:

$B=\{b_1 \dots b_n\}$

$[b_i] = e_i \qquad [b_1-b_n]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

דוגמא:

$B=\{1+x,\ 1-x,\ x^2\}$

V נתון $\quad [V]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$V=1(1+x)-(1-x)+2x^2$ כפי $\quad V=x+1+x+2x^2$

$V=2x+2x^2$

משפט:

יהי V מ"ו ויהי B הס"ס סופי של V

1. $[v]_B = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftrightarrow v = 0_V$
2. $[v]_B = [w]_B \leftrightarrow v = w$
3. $[v+\alpha w]_B = [v]_B + \alpha[w]_B$ (המקרה שראינו)

הוכחה:

1. $v = 0_V \leftrightarrow v = 0\cdot b_1 + \dots + 0\cdot b_n \leftrightarrow [v]_B = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$
2. $\leftarrow$ אם $v = w$ ברור ש- $[v]_B = [w]_B$ עבור יחיד מהצורה.
   $\rightarrow$ אם $[v]_B = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = [w]_B$ אז $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = w$
3. יהיו $v, w \in V$ ו- $\alpha \in F$ אז $[v+\alpha w]_B = [v]_B + \alpha[w]_B$

כלומר: $[v]_B = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ ו- $[w]_B = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$

$v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$

$w = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$

$v + \alpha w = (\alpha_1 + \alpha\beta_1)b_1 + \dots + (\alpha_n + \alpha\beta_n)b_n$

ולכן $[v]_B + \alpha[w]_B = [v+\alpha w]_B = \begin{pmatrix}\alpha_1 + \alpha\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n + \alpha\beta_n\end{pmatrix}$ מ.ל.ש

שימו ❤:

קואורדינטות של וקטור תלויות בסדר בו אברי הבסיס נתונים. כלומר יש ל- V בסיס שונה שבו הקואורדינטות שונות.

מטריצת מעבר בין בסיסים

יהי V מ"ו ויהי V בסיסים B, C

הגדרה מטריצת המעבר $[I]_C^B$

$$\forall v: [v]_C = {}_B[v]_C \cdot [I]_C^B$$

משפט:

יהי V מ"ו ויהיו B, C בסיסים של V

אז קיימת מטריצה יחידה שמקיימת $[I]_C^B$

המקיימת מטריצת המעבר מ-B ל-C המקיימת לכל $v \in V$

$$[v]_C = {}_B[v]_C \cdot [I]_C^B$$

הוכחה:

נניח שקיימת $[I]_C^B$ ונראה שהיא יחידה.

$[b_i]_C = {}_B[b_i]_C \cdot [I]_C^B$ אזי $[b_i]_C = e_i \cdot [I]_C^B$

אזי $[b_i]_C = C_i([I]_C^B)$

$$\left({}_C[b_1] \quad \dots \quad {}_C[b_n] \right) \cdot [I]_C^B = \left({}_C[b_1] \quad \dots \quad {}_C[b_n] \right)$$

ולכן היא יחידה.

נוכיח כי מטריצה זו אכן מקיימת את המעבר, כלומר לכל $v \in V$

$$[v]_C = {}_B[v]_C \cdot [I]_C^B$$

יהי $v \in V$ נסמן $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$

$$\left([b_1]_C \cdots [b_n]_C \right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 [b_1]_C + \dots + \alpha_n [b_n]_C =$$

$$= [\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n]_C = [v]_C$$

לפי סעיף 3 במשפט קודם

דוגמא:

$$V = \mathbb{R}^2 \quad B = \{(1,1), (1,-1)\} \quad S = \{(1,0), (0,1)\}$$

מצא את מטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי לבסיס B

תמיד מהיותו קל.

$$[I]_S^B = \left({}_S[b_1] \cdots {}_S[b_n] \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

שימו לב את מטריצת B בראשונה

כדאי שכך עובד..

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

טענה:

יהי V מ"ו ויהיו D, C, B בסיסים שלו.

$$[I]_C^D = [I]_B^D \cdot [I]_C^B$$

הוכחה:

מינוי מטריצת המעבר, מספיק להראות שלכל $v \in V$

$$[v]_C = [I]_B^D \cdot [I]_C^B \cdot [v]_C \Leftarrow [v]_B = [I]_B^D \cdot [v]_B \Leftarrow [v]_C = [I]_C^B \cdot [v]_C$$

דוגמא:

$$[I]_B^B = I \qquad [v]_B = [I]_B^B \cdot [v]_B$$

אבחנה חשובה:

$$[I]_B^C = \left([I]_C^B\right)^{-1}$$

הוכחה:

נניח $[I]_C^B \cdot [I]_B^C = I$ מספיק כדי שאחד כזה יהפוך

$[I]_C^C = [I]_B^C \cdot [I]_C^B$ נשים!

בחזרה לדוגמא:

$$B = \{(1,1),(1,-1)\} \quad S = \{(1,0),(0,1)\}$$

נמצא את $[I]_B^S$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$[I]_B^S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[(a,b)]_B = [I]_B^S \cdot [(a,b)]_S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix}$$

$$[I]_C^{S'} \cdot [I]_{S'}^{B} = [I]_C^B$$

כלומר: מעבר מ-B ל-C

$[I]_S^B$ בסיס B

$[I]_S^C$ בסיס C

$\left(\text{בסיס } C \;\middle|\; \text{בסיס } B\right)$ מדרגים

$$\left(I \;\middle|\; [I]_C^{S'} \cdot [I]_{S'}^{B}\right) \longrightarrow = [I]_C^B$$

מרחב המנה

הגדרה:

יהי $A \in F^{m\times n}$ נגדיר את מרחב השורות $R(A) \subseteq F^n$.

המרחב הנפרש ע"י שורות A $R(A) = sp\left(R_1(A), \dots R_m(A)\right)$

את מרחב העמודות $C(A) \in F^m$.

המרחב הנפרש ע"י עמודות A $C(A) = sp\left(C_1(A), \dots C_n(A)\right)$

את מרחב הפתרונות $N(A) \subseteq F^n$

מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית A $N(A) = \{V \in F^n \mid AV = 0\}$ מוגדר

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$C(A) = sp\left((1,0,1,0)\ (0,0,1,1)\right)$

$R(A) = sp\left((1,0,1,1)\ (1,1,2,0)\right)$

$\dim(C(A)) = 2 \qquad \dim(R(A)) = 2$

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$C(A) = sp\{(1,3,0)\ (2,1,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$R(A) = sp\left((1,2)\ (3,1)\ (0,2)\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\dim(C(A)) = 2 \qquad \dim(R(A)) = 2$

טענה:

תהיינה A, B מטריצות כך ש $C(AB) \subseteq C(A)$ ① $R(AB) \subseteq R(B)$ ②

הוכחה:

① נסמן ב c_i את העמודות של המכפלה AB ו ב a_i את העמודות של A אזי

$$C_i(AB) = A \cdot C_i(B) = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \quad C(AB) \subseteq C(A)$$

② $R_i(AB) = R_i(A)B = \alpha_1 R_1(B) + \dots + \alpha_n R_n(B) \in R(B)$

שימו ❤:

$b \in C(A)$ אם קיים x כך ש $Ax = b$ יהי פתרון,

נדרש ש $b \in C(A)$ (למעשה כל זוג וקטורים).

מהגדרת המכפלה נניח $b \in C(A)$ אזי קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך ש $b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$ ולכן $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ נסמן

$Ax = b$ פתרון ←

$b \in C(A)$ אם ורק אם $Ax = b$ יש פתרון

דוגמאות:

$$C(A^t) = R(A)$$

משפט:

תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אזי $\dim C(A) = \dim R(A)$

הוכחה:

נסמן $k = \dim C(A)$ לכן קיים בסיס לעמודות המטריצה $\{v_1 \dots v_k\}$

נסמן $B = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_k \\ | & & | \end{pmatrix}$ ב עמודות A שהן בדיוק

שורותיו של מטריצה B הרי הן הבסיס ל $C(A)$

לכן לכל i קיים X_i כך ש $C_i(A) = BX_i$

נסמן $X = \begin{pmatrix} | & & | \\ X_1 & \dots & X_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ אזי $A = \underset{m \times k}{B} \underset{k \times n}{X}$

$R(BX) = R(A)$ $R(BX) \subseteq R(X)$ לכן $R(A) \subseteq R(X)$

$R(X) = sp\{R_1(X) \dots R_k(X)\}$ לכן $\dim R(X) \leq k$ ← $\dim R(A) \leq k$

ולכן $\dim R(A) \leq \dim C(A)$. באופן דומה נוכיח כי $\dim C(A) \leq \dim R(A)$ ולכן

$\dim (R(A^t)) \leq \dim C(A^t)$ ולכן

$$\dim (R(A)) = \dim (C(A))$$

הגדרה:

תהי מטריצה A אז $\text{rank}(A) := \dim R(A) = \dim C(A)$ (דרגה)

נראה הוכחה שלה שם מספר השורות הלינארית מזהיר מס' השורות השונות שאפס בצורה מדורגת.

משפט:

תהי מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ותהי $B \in \mathbb{F}^{n \times k}$ אז

$$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$$

הוכחה:

נשים $R(AB) \subseteq R(B)$ לכן $\dim R(AB) \leq \dim R(B)$

לכן $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}\, B$

מאידך $C(AB) \subseteq C(A)$ לכן $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$

מסקנה:

תהי P הפיכה אז $\text{rank}(PA) = \text{rank}(A)$

הוכחה:

$\text{rank}(PA) \leq \text{rank}(A)$

(שוויון: $\text{rank}(A) = \text{rank}(P^{-1}(PA)) \leq \text{rank}(PA)$)

לכן $\text{rank}(PA) \leq \text{rank}(A)$ לכן $\text{rank}(A) = \text{rank}(PA)$

משפט:

לכל מטריצה שקולת שורה למטריצה שמשמאל לשניה $R(A) = R(CF(A))$ ש"ז בדיוק יש שלש מדרגת שורה.

דוגמא:

האם מדרגת המטריצה A ובדרגת המדורגת שווה?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = CF(A) \qquad C(A) = sp((1,1)) = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$C(CF(A)) = sp\{(1,0)\} = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$R(A) = C(A) = sp\{(1,1)\}$$

$$R(CF(A)) = R(A)$$

הוכחה:

תהי A ומטריצה B מתקבלת לאחר הפעלת פעולות שורה על A

כלומר $B = PA$ עבור P הפיכה

$$R(B) - R(PA) \leq R(A)$$

ראינו $\text{rank}(B) - \text{rank}(PA) = \text{rank}(A)$

לכן $\dim R(B) = \dim R(A)$ משיוון מימדים והכלה זה כיוונית

$$R(B) = R(A)$$

מסקנה:

אלגוריתם לחישוב בסיס לתמונת השורות:

① נדרג מטריצה

② השורות השונות מ-0 מהוות בסיס לתמונת השורות

הסבר:

ברור שהם פורשים את התמונה, נותר להראות שהם בת"ל

המטריצה המדורגת וכך שונה לתמונת השורות של המטריצה המקורית.

נשים לב כי השורות השונות מ-0 הן בת"ל

I את הן היו ת"ל אז אפשר לצמצם עוד שורה, בסתירה לכך שבכל

שבכל הצורה המדורגת, אלו מס שורות אפסים.

II האיברים הפותחים לא יכולים להתצמצם מהשורות אחריהן.

דוגמא:

$$\begin{matrix} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

על מנת למצוא את השורות עם הצורות

היא למספע ב-0 ואת נקפ את

כל השורות קיבלנו את הפתרון הטריוויאלי.

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מצאו בסיס ומימד ל- $R(A)$ כאשר

בסיס $= \{(1,2,3), (0,1,2)\}$

מימד $= 2$ $\quad \dim R(A) = 2$

שימו ❤:

דרגת המטריצה שווה למימד מרחב השורות, שווה למספר הווקטורים בבסיס שלו, שווה למס' השורות השונות מאפס בצורה המדורגת, שווה למס' המשתנים החופשיים, שווה למימד מרחב העמודות

למשל בסיס למרחב העמודות $C(A)$ יהיה: $\{(1,4,7),(2,5,8)\}$

יש לו 2 עמודות בלבד. כלומר ש- $\dim C(A)=2$

יש 3 דרכים לתת בסיס למרחב העמודות

בסיס למרחב העמודות:

אלגוריתם למציאת בסיס למרחב העמודות

1. נדרג את המטריצה
2. אוסף העמודות מהמטריצה המקורית המתאימות לעמודה עם איבר פותח מהווה בסיס למרחב העמודות.

תמיד המימדים שמתאימים למשתנה החופשי מייצרים וקטור לפתרון.

דוגמא:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&2&1\\1&0&-2&0\\1&3&4&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\boxed{1}&1&0&1\\0&\boxed{1}&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

בסיס ל- $R(A)$

$$\{(1,1,0,1)\ (0,1,2,1)\}$$

בסיס ל- $C(A)$

$$\{(1,1,0,3)\ (1,0,1,1)\}$$

נמשיך לדרג ונמצא שם בסיס ל- $N(A)$

$$\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&-2&0\\0&\boxed{1}&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$x=2t\quad y=-2t\quad w=s\quad z=t$

$$(2t,-2t,t,s)=t(2,-2,1,0)+s(0,0,0,1)$$

בסיס ל- $N(A)$ $\{(2,-2,1,0)\ (0,0,0,1)\}$

הסבר לאלגוריתם:

נציב 1 במשתנה החופשי ו-0 בשאר המשתנים החופשיים

נקבל פתרון למערכת ההומוגנית

$$A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}=0$$

$$\underbrace{1\cdot C_i(A)}_{\text{חופשי}}+\underbrace{\alpha_a C_{i_a}(A)+\dots+\alpha_k C_{i_k}(A)}_{\text{משתנים תלויים}}=0$$

המשך להסבר:

כעת המטרה של המשפט הבא היא למצוא את המימדים של המרחבים הנלווים למשפט הדרגה.

$A \xrightarrow{\text{מחזק}}$ כמה עמודות בלתי תלויות יש לנו? $C(A)$ של המימדים של המרחבים הנלווים נבדוק את

כמספר המשתנים החופשיים שלנו שווה ל- $\text{rank}(A)$ ולכן שווה ל- $\dim C(A)$ ואז לפי השלבי נוכל למצוא בסיס ל- $C(A)$ ($\dim(C(A))$ = מס' עמודות ו עמודות פותרות את $C(A)$)

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{pmatrix}$$

$w=0$ $y=1$

$z=0$ $x=-2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$w=1$ $y=0$

$z=2$ $x=-1$

משפט:

יהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אזי ל הטענות הבאות שקולות:

1. A הפיכה
2. $n = \text{rank}(A)$
3. עמודות A בת"ל
4. שורות A בת"ל
5. $N(A) = \{0\}$
6. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ קיים פתרון יחיד למערכת $Ax = b$
7. קיים $b \in \mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד.

הוכחה:

א' ↔ ב' ↔ ג' ↔ ד'

A הפיכה ↔ $CF(A) = I$ ↔ אין שורת אפסים בצורה המדורגת ↔

↔ $\dim C(A) = n$ ↔ $\text{rank}(A) = n$ ↔

הסבר:

$C(A) = sp(C_1(A) \dots C_n(A))$ $\dim C(A) = n$ (מימד $C(A)$ = מס' וקטורים פורשים)

כי אלו הם $C_1(A) \dots C_n(A)$ בסיס

מצד שני, מהמשפט בסיס הם בדיוק n כך ש $\dim C(A) = n$

מאידך נזכור שזה השווה בסיס ↔ $\text{rank}(A) = n$

ה. ג $N(A) = \{0\}$ ↔ $\text{rank}(A) = n$

$N(A) = \{0\}$ ↔ אין משתנה חופשי ↔ בד"ש מלאים ↔ $\text{rank}(A) = n$

כלומר ש- $\text{rank}(A) = n$ ↔ אין משתנה חופשי

ו. ג שלכל $b \in \mathbb{F}^n$ קיים פתרון יחיד למערכת $Ax=b$ ↔ $\text{rank}(A) = n$

← נניח שלכל $b \in \mathbb{F}^n$ קיים פתרון יחיד למערכת $Ax=b$

אז אין משתנים חופשיים כלומר $\text{rank}(A) = n$

→ נניח $\text{rank}(A) = n$ כלומר A הפיכה ולכן קיים פתרון יחיד $Ax=b$

(מהמעבר שראינו ב A)

← קיים $b \in \mathbb{F}^n$ מהצורה שיש למערכת פתרון יחיד אבל אין משתנים

חופשיים ולכן $\text{rank}(A) = n$

→ $\text{rank}(A) = n$ למערכת יש פתרון יחיד לכל b ובפרט קיים b

כזה, למשל $b = 0$.

שימו ❤:

כל צד נתן למרצה ביטחון בלבד.

שאלה:

מספר הממדים של $\ker(A)$ = $\dim(\ker(A))$ = דרגת A

↓ ↓

מספר העמודות יחסי התלות בין העמודות

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נחשב את $\dim \ker(A)$

$\text{rank}(A) = 2 = \dim R(A)$

$\dim \ker(A) = 1$ $\quad$ $\dim R(A) = 3$ $\quad$ $\text{rank}(A) \neq \dim R(A)$

העתקות לינאריות

הגדרה: זו מילה מסובכת לפונקציות. אלגסט מיותרים.

למעשה אלו מתכתבים עם פונקציות לינאריות.

הגדרה:

יהיו U, W מ"ו מעל אותו שדה $\mathbb{F}$

פונקציה $T: U \to W$ נקראת העתקה לינארית אם

לכל $u_1, u_2 \in U$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים:

א. $T(u_1+u_2) = Tu_1 + Tu_2$ (סימון אחר מופיע לפעמים בהעתקה לינארית)

ב. $T(\alpha u_1) = \alpha T u_2$

דוגמאות:

$V = \mathbb{R}$ כלל $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $T(x) = x^2$

הצג T העתקה לינארית

תכונת השמורה:

יהיו V, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אז $T0_V = 0_W$

הוכחה:

$$T0_V = T(0_F \cdot 0_V) = 0_F \cdot T0_V = 0_W$$

(מעל M)

דוגמא:

$[\,]_B : V \to \mathbb{F}^n$ הינו העתקה לינארית

$[v_1+v_2]_B = [v_1]_B + [v_2]_B$ ו- $[\alpha v_1]_B = \alpha [v_1]_B$

דוגמא חשובה ומהותית:

יהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ אז $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$

$T_A v := Av$ העתקה לינארית

הוכחה:

יהי $u, v \in \mathbb{F}^n$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$ צ"ל

① $T_A(u+v) = T_A u + T_A v$ ו- ② $\alpha T_A(u) = T_A(\alpha u)$

צ"ל $A(u+v) = Au + Av$ ✓ נכון

צ"ל $\alpha \cdot Au = A\alpha u$ ✓ נכון

נמצא שכל העתקות הלינאריות בין מרחבים וקטורים סופי הן כאלה.

דוגמא:

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad T(a;b;c) = (a+b+c, a-c)$

נקי שהעתקה T העתקה לינארית

מצאו מטריצה כזו

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a-c \end{pmatrix}$$

תזכורת

לעתים את התכונה לינאריות נאמר פשוט $T: V \to W$

שמקיימת $T(v_1 + \alpha v_2) = Tv_1 + \alpha Tv_2$

סימון:

התבנית הנתונה $I: V \to V$ $\quad Iv = v$

פונקציה הפיכה $\Leftrightarrow$ קיימת T^{-1} כך ש $T^{-1} \circ T = I$ ו $T \circ T^{-1} = I$

T נקראת חח"ע אם לכל $v_1, v_2 \in V$ מתקיים $Tv_1 = Tv_2 \Rightarrow v_1 = v_2$

T נקראת על אם לכל $w \in W$ קיים $v \in V$ כך ש $Tv = w$

משפט:

T הפיכה $\Leftrightarrow$ T חח"ע ועל.

אם $T: V \to W$ התבנית לינארית הפיכה, אז T^{-1} גם

תבנית לינארית

הוכחה:

יהי $w_1, w_2 \in W$ $\quad \alpha \in \mathbb{F}$ $\quad$ נרצה $T^{-1}(w_1 + \alpha w_2) = T^{-1}w_1 + \alpha T^{-1}w_2$

$$T^{-1}(w_1 + \alpha w_2) = T^{-1}\left(T\left(T^{-1}w_1 + \alpha T^{-1}w_2\right)\right) = T^{-1} \circ T\left(T^{-1}w_1 + \alpha T^{-1}w_2\right) = T^{-1}w_1 + \alpha T^{-1}w_2$$

$$= T^{-1}\left(T \circ T^{-1}w_1 + \alpha T \circ T^{-1}w_2\right) = T^{-1}\left(w_1 + \alpha w_2\right) \quad \checkmark$$

שאלות

התבניות לינאריות נקראות הומומורפיזמים

הומומורפיזמים הפיכים נקראים אוטומורפיזמים

הומומורפיזם שומר על המבנה (כאן שומר סדר)

מתחומים שיש בינהם יחס נקראים איזומורפיים.

פשוט כך אומר שמתי אותו הדבר עם שמות שונים.

לדוגמא:

$$T: \mathbb{R}_n(x) \to \mathbb{R}^{n+1} \qquad T(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = (a_0 \ldots a_n)$$

T הפיכה.

טענה:

יש 2 מרחבים ממימד n הם איזומורפים

הסבר:

יהי V מ"ו ממימד n . יהי B בסיס ל-V

$[\,]_B : V \to \mathbb{F}^n$ היא התאמה שלכל $v \in V$

$[v_1]_B + [v_2]_B = [v_1 + v_2]_B$ מתקיים $[v]_B \alpha = [\alpha v]_B$

לכן V איזומורפי ל- $\mathbb{F}^n$

משפט:

כל 2 מרחבים ממימד n איזומורפיים.

הוכחה:

יהי $T : V \to W$, $S : W \to U$ התאמות לינאריות

אזי $S \circ T$ התאמה לינארית

הקדמה למשפט הבא דוגמה:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(1) = 1$ $f(1) = 1$ יש פונ כאלו

ואין דרך למצוא מוצא של אף נקודה אחרת.

יהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $T(1,0) = (1,1)$ $T(0,1) = (1,1)$

$T(1,1) = (0,0)$ $T((1,0)+(0,1)) = (1,1)+(1,1) = (2,2) \neq (0,0)$

T לא התאמה כי לא קיים פונ כאלו :

כשגם: $T(1,1) = (2,2)$ $T(0,1) = (1,1)$ $T(1,0) = (1,1)$

לכל התאמה שמקיימת את 2 התנאים הראשונים נקרא

מקיימת את הנוסחה הפשוטה קיים כאלו $T(x,y) = (y+x, y+x)$

לכן יהי $\begin{pmatrix} y+x \\ y+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

כל התאמה שניתן למצוא בצורה הנ"ל התאמה לינארית

משפט ההצגה:

יהי V מ"ו ויהי בס"ס $B=\{v_1 \dots v_n\}$

יהי W מ"ו ויהיו $w_1 \dots w_n \in W$ לאו דווקא שונים.

אזי קיימת העתקה לינארית יחידה $T: V \to W$ שמקיימת

$$Tv_1 = w_1 \quad \dots \quad Tv_n = w_n$$

הוכחה:

יהי $v \in V$ אזי קיימים באופן יחיד (כי B בס"ס) $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

נגדיר $Tv := \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$ את T העתקה לינארית

ועל T שמקיימת את הדרוש.

יהיו $u_1, u_2 \in V$ ויהי $\alpha \in F$

$$T(u_1 + \alpha u_2) = Tu_1 + \alpha Tu_2$$

$$u_1 = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \qquad u_2 = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_n v_n$$

$$Tu_1 = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n \qquad Tu_2 = \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_n w_n$$

$$u_1 + \alpha u_2 = (\beta_1 + \alpha\gamma_1) v_1 + \dots + (\beta_n + \alpha\gamma_n) v_n$$

$$T(u_1 + \alpha u_2) = (\beta_1 + \alpha\gamma_1) w_1 + \dots + (\beta_n + \alpha\gamma_n) w_n$$

$$Tu_1 + \alpha Tu_2 = T(u + \alpha u_2) \quad \text{לכן}$$

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n \qquad Tv_1 = w_1 \quad \dots \quad Tv_n = w_n$$

$$Tv_1 = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \dots + 0 \cdot w_n = w_1$$

$$\forall i : Tv_i = w_i \quad \text{לכן}$$

יחידות:

תהיינה T, S כאלה, יהי $v \in V$ כך ש- $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$$Tv = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 Tv_1 + \dots + \alpha_n Tv_n = \quad Tv = Sv \quad \text{כי}$$

$$= \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n = Sv$$

הגדרה:

יהי ת"ל $T: V \to W$

הגרעין של T הוא אוסף כל הוקטורים ששולחים ל-0_W

$$\ker T = \{ v \in V \mid Tv = 0 \}$$

טענה:

$\ker T$ הוא תמ"ו של V

התמונה של T היא אוסף הוקטורים שיוצאים מ-T

$$Im\, T = \{ w \in W \mid \exists v \in V : Tv = w \} = \{ Tv \mid v \in V \}$$

טענה:

$Im\, T$ הוא תמ"ו של W (ברור)

דוגמא:

$$T(x,y) = (x+2y, -x-2y)$$

$$= \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}} \underset{v}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

נמצא את הגרעין והתמונה.

$$\ker T = \{ v \in V \mid Tv = 0 \} = \left\{ (x,y) \mid \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= N \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

תמ"ו הפתרונות

$$Im\, T = \{ Tv \mid v \in V \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = C(A)$$

משפט:

יהי $T: V \to W$ אז:

① T חח"ע $\leftrightarrow$ $\ker T = \{0_V\}$ $\leftrightarrow$ $\dim \ker T = 0$

② T על $\leftrightarrow$ $Im\, T = W$ $\leftrightarrow$ $\dim Im\, T = \dim W$

הוכחה:

T חח"ע $\Leftrightarrow$ $\ker T = \{0_V\}$

$\leftarrow$ נניח T חח"ע ל"ש $\ker T = \{0_V\}$

נניח בשלילה ש- $\ker T \neq \{0_V\}$

כיון ש $\ker T$ אי"ו $0_V \in \ker T$ ולכן קיים $0_V \neq V \in \ker T$

אזי $T0_V = Tv = 0_W$ אבל $v \neq 0_V$ בסתירה לחח"ע T

$\rightarrow$ נניח $\ker T = \{0_V\}$ ל"ש T חח"ע

יהיו $v_1, v_2 \in V$ כך ש- $Tv_1 = Tv_2$ ל"ש $v_1 = v_2$

אזי $Tv_1 - Tv_2 = 0_W$ ולכן $T(v_1 - v_2) = 0_W$

ולכן $v_1 - v_2 \in \ker T$ ולכן $v_1 - v_2 = 0_V$ ולכן $v_1 = v_2$ ■

תזכורת:

מרחב ש- $T: V \to W$

$$\ker T = \{v \in V \mid Tv = 0\} \subseteq V$$

כמו שמרחבים בדרך כלל. הפונקציה במרחב חח"ע

T חח"ע $\leftrightarrow \dim \ker T = 0$

תמונה של $T: V \to W$

$$\operatorname{Im} T = \{Tv \mid v \in V\} \subseteq W$$

T על $\leftrightarrow \dim \operatorname{Im} T = \dim W$

הוכחה:

T על $\leftrightarrow \operatorname{Im} T = W$ (נעבור שוב מהגדרה)

$\operatorname{Im} T = W \leftrightarrow \dim \operatorname{Im} T = \dim W$

$\Rightarrow$ ברור

$\leftarrow$ $\operatorname{Im} T \subseteq W$ $\dim \operatorname{Im} T = \dim W$

לפי הגדרת חד כיוונית - שווים מימדים $\operatorname{Im} T = W$ ■

משפט:

אזי $T: V \to W$ ויהי $B = \{v_1 \dots v_n\}$

$Tv_1 \dots Tv_n$ פורשים את $\operatorname{Im} T$

כלומר $\operatorname{Im} T = sp\{Tv_1 \dots Tv_n\}$

על מנת שתהא העתקה נוספת אז T על צריך בסיס ומחזה span.

הוכחה:

א' יהי $Tv_n \alpha_n + \dots + Tv_1 \alpha_1 \in sp\{Tv_1 \dots Tv_n\}$

$$= T(v_1 \alpha_1 + \dots + v_n \alpha_n) \in \operatorname{Im} T$$

ב' יהי $w \in \operatorname{Im} T$ נרצה למצוא $v \in V$ כך ש $Tv = w$

קיים הצגה של V בעזרת בסיס למשל $V = v_1 \alpha_1 + \dots + v_n \alpha_n$

$w = Tv_1 \alpha_1 + \dots + Tv_n \alpha_n \in sp\{Tv_1 \dots Tv_n\}$ ■

משפט הדרגה:

יהי $T: V \to W$ העתקה לינארית.

$$\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$$

(מאחר ש- $\dim N(A) + \dim C(A) = \text{מס' העמודות}$)

הוכחה:

נסמן ב- $\{v_1 \dots v_k\}$ בסיס ל- $\ker T$ ונשלים אותו לבסיס

ל- V $\{v_1 \dots v_n\}$

נראה ש- $Tv_{k+1} \dots Tv_n$ פורשים את $\operatorname{Im} T$

ונניח כי $\dim \ker T = k$

$\dim \operatorname{Im} T = n-k$

$\dim V = n \leftarrow \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$

שכן משפט קודם $\operatorname{Im} T = sp\{Tv_1 \dots Tv_n\}$

$T \ker \ni v_1 \dots v_k \leftarrow Tv_1 = \dots = Tv_k = 0$

ולכן $\operatorname{Im} T = sp\{Tv_{k+1} \dots Tv_n\}$

נותר להוכיח ש $Tv_{k+1} \dots Tv_n$ בת"ל

נניח קומבינציה לינארית השווה ל 0 כך ש-

$$\alpha_{k+1} Tv_{k+1} + \dots + \alpha_n Tv_n = 0 \leftarrow T(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n) = 0$$

ולכן $\alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n \in \ker T$

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

(ש איבר השייך לגרעין שווה כצ"ל גם לאיבר בגרעין)

נסיק אפוא ש $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ כיוון ש $v_1 \dots v_n$ בת"ל בסתירה!

מסקנה:

משפט הדרגה לשורות נותן לנו $\dim N(A) + \dim C(A) = \text{מס' העמודות}$

הוכחה:

יהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ נגדיר $T: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ כך ש- $Tv = Av$

$\ker T = N(A)$ $\quad \operatorname{Im} T = C(A)$

$\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = n$

$\dim N(A) + \dim C(A) = \text{מס' העמודות}$

הגדרה:

יהי $T: V \to W$ העתקה לינארית. הדרגה של T היא

$$\text{rank} := \dim \text{Im}\, T$$

מסקנות משפט ממשפט הדרגה:

יהי $T: V \to W$

1. T חח"ע אם"ם $\ker T = \{0\}$ אם"ם T על.

הוכחה: T חח"ע $\Leftarrow \dim \ker T = 0 \Leftarrow \dim \text{Im}\, T = \dim V \Leftarrow (T$ על $\Leftrightarrow \dim V = \dim W)$

2. אם $V \cong W$ אזי מעל שדות סופיים קיימת $T: V \to W$ חח"ע ועל אזי $\dim V = \dim W$.

3. אם T חח"ע אזי $\dim V \leq \dim W$

הוכחה:

$\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im}\, T$ לכן אם T חח"ע

$\dim \text{Im}\, T = \dim V$, $\text{Im}\, T \subseteq W \Rightarrow \dim \text{Im}\, T \leq \dim W$.

4. אם T על, אזי $\dim V \geq \dim W$

הוכחה:

$$\dim \ker T + \dim \text{Im}\, T = \dim V$$

$$\dim V = \dim W + \dim \ker T \geq \dim W$$

5. נניח $\dim V = \dim W$

T חח"ע $\Leftrightarrow T$ על $\Leftrightarrow T$ הפיכה.

משפט:

יהיו V, W מ"ו נוצרים סופית, אזי $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

הוכחה:

$\Leftarrow$ אם $V \cong W$ אזי קיימת $T: V \to W$ חח"ע ועל

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im}\, T \Leftarrow \dim W = \dim V - 0$$

$\Rightarrow$ נניח $\dim V = \dim W$

יהי $\{v_1 \dots v_n\}$ מס' ל- V, $\{w_1 \dots w_n\}$ מס' ל W

לפי משפט ההצגה קיים $T: V \to W$ כך ש- $Tv_i = w_i$

משפט הדמה:

מה קשר בהמשך $Tv_1 = w_1 \dots Tv_n = w_n$?

$$\text{Im}\,T = sp\{Tv_1 \dots Tv_n\} = W = sp\{w_1 \dots w_n\}$$

אם T על אפשר לחסר $\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im}\,T$ ✓

מטריצה מייצגת העתקה

נשאף שכל העתקה לינארית בין מרחבים סופיי שקולה לכפל במטריצה.

דוגמא:

$$T: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x] \qquad T(p(x)) = p'(x)$$

אזי $T(a+bx+cx^2+dx^3) = b+2cx+3dx^2$

יהי $S = \{1, x, x^2, x^3\}$ אזי $[p(x)]_S = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$$[T(p(x))]_S = \begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{pmatrix}$$

אזי ←

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{pmatrix}$$

משפט:

יהי $T: V \to W$ ט"ל ויהיו E, F בס"ס V, W בהתאמה.

אז קיימת מטריצה יחידה שמקיימת $[T]_F^E$

$$[T]_F^E [v]_E = [Tv]_F$$

הוכחה:

נתבונן ב $E = \{v_1 \dots v_n\}$ סדורה. נסמן $[v_i]_E = e_i$

נניח שקיימת מטריצה כזו.

$$[T]_F^E [v_i]_F = [Tv_i]_F = C_i [T]_F^E$$

אזי $[T]_F^E = \left([Tv_1]_F \dots [Tv_n]_F \right)$

כלומר מספיק את T על איברי הבס"ס E

ומשפטים קודמים אומרים שבס' F ושווים בהתאמה

נניח שהמטריצה הזו אכן מקיימת את מה שנדרוש.

המשך תכונות:

$$[T]_F^E \cdot [V]_E = [Tv]_F$$ כך ש $V \in V$ ולכל

$V = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ כאשר v כתיבה קואורדינטית

$$[V]_E = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$ ביחס ל

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ [Tv_1]_F & \cdots & [Tv_n]_F \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 [Tv_1]_F + \dots + \alpha_n [Tv_n]_F =$$

$$= [\alpha_1 Tv_1 + \dots + \alpha_n Tv_n]_F = [T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)]_F = [Tv]_F$$

דוגמאות: (בשקפי עזר אחרונים)

$a=80 \quad b=60 \quad c=20$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix} = 53.33_$$ ← ממוצע

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$$ ← פיבונאצ'י

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \end{pmatrix}$$ ← כלכלה: דולר אחד = תמונה

(השורות מתכנסות אחת אל השניה)

דוגמא:

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad T(x,y) = (-x, x-y)$$

E F בסיסים

$$E = \{(1,1)(-1,1)\} \qquad F = \{(1,0)(0,1)\}$$

$$T(1,1) = (-1,2) \qquad T(-1,1) = (1,0)$$

$$[T(1,1)]_F = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad [T(-1,1)]_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [T]_F^E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[(0,2)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_F^E [(0,2)]_E = [T(0,2)]_F$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

נבדוק:

$$T(0,2) = (0,2) \qquad [(0,2)]_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ נכון. זאת יוצא

דוגמא:

יהי $I: V \to V$

המקיים את הנוסחה.

יהיו E, F בסיסים של V

הוכח:

$$\left[I\right]_F^E = \left(\left[I\right]_E^F\right)^{-1}$$

מטריצת המעבר — מטריצה הפוכה

הוכחה:

נסמן את I על איברי $E = \{v_1 \dots v_n\}$

$$Iv_1 = v_1$$

$$Iv_n = v_n$$

נשים את הקואורדינטות שלהם לפי F בעמודות

$$\left[I\right]_F^E = \left(\left[v_1\right]_F \dots \left[v_n\right]_F\right) = \left[I\right]_F^E$$

מטריצת המעבר (v_1) (v_n) מ"כפפ

דוגמא:

יהי $T: V \to W$ $S: U \to W$

E F G בסיסים

V W U

כפי שמיוצג בדוגמה המקורית.

$$\left[S \circ T\right]_G^E = \left[S\right]_G^F \left[T\right]_F^E$$

הוכחה:

מיתוגיה המטריצה המייצגת מוגדרת עבור כל $v \in V$

$$\left[S\right]_G^F \cdot \left[T\right]_F^E \cdot \left[v\right]_E = \left[S(T(v))\right]_G$$

$$\left[S\right]_G^F \left[T(v)\right]_F = \left[S(T(v))\right]_G = \left[S \circ T(v)\right]_G$$

משלם

מסקנה:

יהי $T: V \to W$ V W

E, F בסיסים של

T הפיכה $\leftrightarrow$ $\left[T\right]_F^E$ הפיכה.

הוכחה – מסקנה:

נתון T הפיכה וגם $[T]_F^E$ הפיכה

קיים $T^{-1}: W \to V$ כך ש- $T \circ T^{-1} = I$

$$[T \cdot T^{-1}]_F^F = [I]_F^F = I$$

$$[T]_F^E \cdot [T^{-1}]_E^F = I$$

כמה שורות יש ב- $[I]_F^E$?

מס' האיברים ב- E

$$[T]_F^E = \left([Tv_1]_F \ \cdots \ [Tv_n]_F \right)$$

כמה שורות יש ב- $[I]_F^E$?

מס' האיברים ב- F

- כיון ש- T הפיכה $\dim V = \dim W$ ולכן $[I]_F^E$ ריבועית

ולכן $\left([T]_F^E \right)^{-1} = [T^{-1}]_E^F$

$\leftarrow$

כיון ש- $[T]_F^E$ הפיכה וגם T הפיכה

$[T]_F^E$ ריבועית ולכן $\dim V = \dim W$

נסמן ש T חח"ע ולכן הפיכה.

נניח בשלילה שקיים $v \neq 0$ כך ש $Tv = 0$

(T חח"ע $\leftrightarrow$ $\ker T = 0$ לכן נניח בשלילה ש $\ker T \neq 0$)

אזי $[V]_E \neq 0$ $[T]_F^E \cdot [V]_E = [0]_F$ $[0]_F = 0$

$\leftarrow$ $[V]_E = 0$ סתירה! $/ \left([I]_F^E \right)^{-1}$ $[T]_F^E [V]_E = 0$

משפט:

יהי $T: V \to W$ ויהיו E ו- F בסיסים של V ו- W בהתאמה

ויהיו B ו- C בסיסים

אזי: $[T]_B^E = [I]_C^E [T]_C^B [I]_B^E$

הוכחה:

$$[T]_C^B \cdot [I]_B^E = [T \circ I]_C^E = [T]_C^E$$

$$[I]_C^E [T]_B^C = [T \circ I]_B^E = [T]_B^E \blacksquare$$

תזכורת

נזכיר את ההגדרות לגבי העתקות לינאריות

$$\ker T = \{v \in V \mid Tv = 0\}$$

$$\operatorname{Im} T = \{w \in W : \exists v \in V : Tv = w\}$$

$$[T]_F^E [v]_E = [T \cdot v]_F$$

סימון:

- יהי V מ"ו, יהי $W \subseteq V$ תת מרחב ויהי B בסיס ל-V.

$$[W]_B = \{[w]_B \mid w \in W\}$$

טענה:

יהי $T: V \to W$

יהיו E, F בסיסים

$$N\left([T]_F^E\right) = [\ker T]_E \quad \text{אזי}$$

$$C\left([T]_F^E\right) = [\operatorname{Im} T]_F$$

דוגמא:

$$T: V \to W \qquad W = \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad V = \mathbb{R}_2[x]$$

$$F = \left\{\underset{1}{\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}}, \underset{2}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}, \underset{3}{\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}}, \underset{4}{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}}\right\} \qquad E = \{1, 1+x, 1+x^2\}$$

$$[T]_F^E = \overset{A}{\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\1&1&5\\1&-1&-1\end{pmatrix}} \to$$

מצאו את $\operatorname{Im} T$, $\ker T$

$$\to \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad N\left([T]_F^E\right) = \{t(-2,-3,1)\} = [\ker T]_E$$

$$\ker T = sp\{-2\cdot 1 - 3(1+x) + 1(1+x^2)\} = sp\{-4-3x+x^2\}$$

$$C\left([T]_F^E\right) = sp\{(1,0,1,1)\ (0,1,1,-1)\} = [\operatorname{Im} T]_F$$

$$\operatorname{Im} T = sp\left\{\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&2\\0&2\end{pmatrix}\right\}$$

כפי שמצאנו את התמונה במרחב.

תזכורת:

התמונה נתונה במידת מרחב 3×3.

- מרחב - $T(x,y,z) = \dots$ ①
- משפט ההצגה $Tv_i = w_i$ ②
- מציאת מטריצה $[T]_F^E$ ③

נסמן את המטריצה המייצגת של ההעתקה ב־ T ביחס לבסיסים הסטנדרטיים:

$$[T]_F^E \left[a+bx+cx^2\right]_E = \left[T\left(a+bx+cx^2\right)\right]_F$$

נמצא את $\left[a+bx+cx^2\right]_E$:

$$a+bx+cx^2 = \alpha_1(1) + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(1+x^2)$$

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \qquad b = \alpha_2 \qquad c = \alpha_3$$

$$\alpha_1 = a-b-c$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 3} \begin{pmatrix} a-b-c \\ b \\ c \end{pmatrix}_{3\times 1} = \left[T\left(a+bx+cx^2\right)\right]_F = \begin{pmatrix} a-b+c \\ b+3c \\ a+4c \\ a-2b-2c \end{pmatrix}$$

$$T\left(a+bx+cx^2\right) = (a-b+c)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (b+3c)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (a+4c)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ (a-2b-2c)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a-b+c & 2b+6c \\ 2a-2b+2c & 2b+6c \end{pmatrix}$$

$$T\left(-4+3x-x^2\right) = \begin{pmatrix} -4+3-1 & -6+6 \\ -8+6+2 & -6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

נוכיח את הטענות:

① $[T]_F^E [v]_E = 0 \leftrightarrow [Tv]_F = 0 \leftrightarrow Tv = 0_W \leftrightarrow v \in \ker T$

$[v]_E \in N\left([T]_F^E\right)$ ● $[\ker T]_E = N\left([T]_F^E\right)$

② $w \in \operatorname{Im} T$ אם"ם $\exists v \in V$ כך ש־ $Tv = w$ אם"ם $\exists v \in V$ כך ש־ $[T]_F^E [v]_E = [w]_F$ אם"ם $[w]_F \in C\left([T]_F^E\right)$ (עמודות של המטריצה).

דטרמיננטות

עבור מטריצה ריבועית A

נסמן דטרמיננט $|A|$

לדוגמא:

מטריצה 2x2: $\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = ad-bc$

$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right| = 4-4 = 0$ $\qquad$ $\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right| = 3$

נכונות ושקולות ש: הדטרמיננטה של $A \neq 0$ $\leftrightarrow$ A הפיכה

למשל A הפיכה $\leftrightarrow |A| \neq 0$.

תמורות

S_n הוא אוסף הפונקציות החח"ע ועל מ- $\{1,2,\ldots n\}$ ל- $\{1,2,\ldots n\}$

דוגמא ומשמעות:

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ נסמן: $f(1)=2$ $f(2)=3$ $f(3)=1$

תמורה זה שינוי

הסיפור: n אנשים נשמים, בשלום עובר סוף ושלם קונסים

ואז מתחלפים חצרה אינשהו.

כמה תמורות יש ב- S_n? $\quad 1\ 2\ 3\ \ldots\ n$

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)(n-1)\cdot n$

מתוצר מיוצג את התמורה מה לא אובר (סדנה $(2,3,5)$)

במתצר נשלח לאיבר הבא אחריו, ושאר האיברים (שלחים שרצים

$(2,3,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ מ- S_5

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (1\ 2\ 3)$ = המתצר

שאלה:

כל תמורה ניתנת לכתיבה כהרכבה של מתצרים (זרים).

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4)(2\ 5\ 6)(3)$

טענה:

סימן של מחזור הוא $(-1)^{k-1}$

כאשר k הוא מס' האיברים במחזור.

כמו כן הסימן של תמורה הוא מכפלת סימני המחזורים

המרכיבים אותה וזה לא תלוי באופן כתיבה שלה

כהרכבה של מחזורים.

דוגמא:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = (1\,2\,3) = \sigma$$

$$\text{sign}(\sigma) = (-1)^4 = 1$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = (1\,2) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = (1\,2)\circ(2\,3)$$

$$(-1)^3 \cdot (-1)^3 = 1$$

דוגמא:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&4&1&6&2\end{pmatrix} = (1\,3\,4)(2\,5\,6) \to +$$

הגדרה:

יהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אזי:

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} \text{sign}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

דוגמא:

$$S_1 = \{Id\} = \{(1)\} \quad \sigma = (1) \quad A = (a) \in \mathbb{F}^{1\times 1}$$

$$|A| = \text{sign}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)} = (+)\cdot a_{11} = a_{11}$$

$$|(a)| = a$$

$$S_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}}_{\sigma_1} \quad \underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}}_{\sigma_2} \right\} \qquad A = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$$

$$\text{sign}\,\sigma_1 = (+)1 \qquad \text{sign}\,\sigma_2 = (-)1$$

$$\text{sign}(\sigma_1)\cdot a_{1\sigma_1(1)}\cdot a_{2\sigma_1(2)} = (+)\,a_{11}\cdot a_{22} =$$

$$\text{sign}(\sigma_2)\cdot a_{1\sigma_2(1)}\cdot a_{2\sigma_2(2)} = -a_{12}\cdot a_{21}$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

הגדרה:

סימן של מחזור הוא $(-1)^{k-1}$

כאשר k הוא מס' האיברים במחזור.

כמו כן הסימן של תמורה הוא מכפלת סימני המחזורים המרכיבים אותה וניתן לראות בקלות בצורה שלהם כהרכבה של מחזורים.

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3) = \sigma$$

$$sign(\sigma) = (-1)^4 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (12)\circ(23)$$

$$(-1)^3 \cdot (-1)^3 = 1$$

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (134)(256) \to +$$

הגדרה:

יהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אזי:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

דוגמא:

$S_1 = \{[Id]\} = \{(1)\} \quad \sigma = (1) \quad A = (a) \in \mathbb{F}^{1\times 1}$

$|A| = sign(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} = (+) \cdot a_{11} = a_{11}$

$|(a)| = a$

$S_2 = \{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}\}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$

$sign\ \sigma_1 = (+)1 \qquad sign\ \sigma_2 = (-)1$

$sign(\sigma_1) \cdot a_{1\sigma_1(1)} \cdot a_{2\sigma_1(2)} = (+)\ a_{11} \cdot a_{22} =$

$sign(\sigma_2) \cdot a_{1\sigma_2(1)} \cdot a_{2\sigma_2(2)} = -a_{12} \cdot a_{21}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

דוגמא:

$$S_3 = \left\{ \underset{(1)(2)(3)}{\overset{+}{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}}}, \underset{(1)(23)}{\overset{-}{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}}}, \underset{(13)(2)}{\overset{-}{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}}}, \underset{(12)(3)}{\overset{-}{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}}}, \underset{(123)}{\overset{+}{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}}}, \underset{(132)}{\overset{+}{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}}} \right\} \quad |S_3| = 3! = 6$$

נ' תמורה נתונה ע"ז הפלרמיננטה, מחוקר 1.

$$+ a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}\cdot a_{32} - a_{13}a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}a_{21}\cdot a_{33} = |A|$$

דוגמא:

שיטה של הוספת 2 עמודות בצד

$$\left|\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\right| = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 - 3\cdot5\cdot7 - 1\cdot6\cdot8 - 2\cdot4\cdot9 = 0$$

תכונה:

שוויון של הדטרמיננטה של שורה

$$|A+B| \neq |A| + |B|$$

$$\left|\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right| = 1$$

אבל שהשוויון!

$$\left|\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right| = 0 + 0 = 0$$

מה שכן נכון!!

אלא אם כן תכונה נכונה ←

$$\left|\begin{pmatrix}-v_1-\\ \vdots \\ -v_i+u_i-\\ \vdots \\ -v_n-\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-v_1-\\ \vdots \\ -v_n-\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}-v_1-\\ \vdots \\ -u_i-\\ \vdots \\ -v_n-\end{pmatrix}\right|$$

דוגמא:

$$\left|\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\right| = -1 = -2+1$$

דוגמא:

$$\left|\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right| = 0$$

הוכחת התכונה:

$$A = \begin{pmatrix}-v_1-\\ \vdots \\ -v_n-\end{pmatrix} \qquad u_i = (b_{i1}\ b_{i2}\ \cdots\ b_{in})$$

נחסר את u_i משורה ה-i של A ונקבל

$$C = \begin{pmatrix}-v_1-\\ \vdots \\ -v_i+u_i-\\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}-v_1-\\ \vdots \\ -u_i-\\ \vdots \\ -v_n-\end{pmatrix}$$

ונ"ל $|A| + |B| = |C|$

$$|C| = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot c_{1\sigma(1)}\cdots c_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\cdots(a_{i\sigma(i)} + b_{i\sigma(i)})\cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \left(\sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\right) + \left(\sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\cdots b_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}\right).$$

תכונה:

ניתן לבצע את הדטרמיננטה לפי שורה (כפי שהקלדר)

תהי A מטריצה ריבועית. תהי B המטריצה שנקבל מכפל סקלר $\alpha \in F$ של שורה ה-i ב-A

$$A = \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \alpha v_i & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix}$$

הוכחה:

$$|B| = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots \alpha a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \alpha \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \alpha |A|$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0 \qquad \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1$$

מסקנה חשובה:

יהי $A \in F^{n \times n}$ ויהי $c \in F$

אז: $|cA| = c^n |A|$

הסבר: כפלנו כל שורה ב-c

דוגמא חשובה:

יהי: $A \in F^{n \times n}$

$$|-A| = (-1)^n |A|$$

דוגמאות:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 2 \qquad \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right| = 2^2 = 4$$

משפט:

החלפת שורות במטריצה

יהי: $A \in F^{n \times n}$ המטריצה שמתקבלת מהחלפת השורה ה-i ב-j של A $(i \neq j)$ אז: $|B| = |A|$

דוגמאות:

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = ad - cb \qquad \left| \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \right| = cb - ad$$

דוגמא:

$a_{12} \cdot a_{24} \cdot a_{31} \cdot a_{43}$

החלפה 2,3 ↓

$a_{12} \cdot a_{34} \cdot a_{21} \cdot a_{43}$

דוגמא

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(1\,4)\circ\sigma = \tau \quad \rightarrow \quad \operatorname{sign}(\sigma) = -\operatorname{sign}(\tau)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{3} \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \tau$$

- הוכחת המשפט:

$$|B| = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots$$

σ נגדיר τ ע"י הרכבה מהימין

$$\tau = \sigma \mid (\sigma(i)\ \sigma(j))$$ בצורה כזו בהחלט

$$= \sum_{\tau} -\operatorname{sign}(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} = -\sum_{\tau} \operatorname{sign}(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} = -|A|$$

מסקנה:

אם ל-A ריבועית יש 2 שורות זהות אז $|A| = 0$

הוכחה:

נתון בין 2 השורות הזהות ונקבל את A

$$|A| = -|A| \rightarrow |A| = 0$$

הערה:

אם $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ו-B התקבלה מפעולה אלמנטרית $R_i : R_i + \alpha R_j$

אז $|A| = |B|$

הוכחה:

$$A = \begin{pmatrix} - v_1 - \\ \vdots \\ - v_n - \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} - v_1 - \\ - v_i + \alpha v_j - \\ - v_n - \end{pmatrix}$$

$$|B| = |A| + \left| \begin{pmatrix} - v_1 - \\ - \alpha v_j - \\ - v_j - \\ - v_n - \end{pmatrix} \right| = |A| + \alpha \left| \begin{pmatrix} - v_1 - \\ - v_j - \\ - v_j - \\ - v_n - \end{pmatrix} \right| = |A| + 0 = |A|$$

2 שורות זהות

תזכורת:

הדטרמיננטה של מטריצה ריבועית A מוגדרת

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

כיצד פעולה שורה משפיעה על הדטרמיננטה?

נסמן פעולה שורה על A ונקבל B

1. $R_i \leftrightarrow R_j$ $\quad |A| = -|B|$
2. $R_i : R_i + \alpha R_j$ $\quad |A| = |B|$
3. αR_i $\quad \alpha|A| = |B|$

לינאריות של הדטרמיננטה:

$$\left| \begin{pmatrix} - V_1 - \\ \vdots \\ a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n \\ \vdots \\ - V_n - \end{pmatrix} \right| = a_1 \begin{vmatrix} - V_1 - \\ \vdots \\ - u_1 - \\ \vdots \\ - V_n - \end{vmatrix} + \cdots + a_n \begin{vmatrix} - V_1 - \\ \vdots \\ - u_n - \\ \vdots \\ - V_n - \end{vmatrix}$$

שורה: שורה כפ.

טענה:

תהי מטריצה משולשית:

מכפלת איברי האלכסון

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \text{משהו} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

דוגמא:

נמצא את הדטרמיננטה של A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

הוכחת משפט:

תהי A מטריצה משולשית עליונה $A \in F^{n\times n}$

$$|A| = \sum_{\sigma} sign(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n}$$

כדי שמכפלה אחת תהיה לא מתאפסת:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

אם נוכל לתאר את המכפלה שנשארה לא מתאפסת.

$$Id = (1)(2)\cdots(n) \qquad sign(Id) = 1$$

נשים לב. $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$

דוגמאות:

מצאו לאילו ערכי a כמה פתרונות יש למערכת $Ax=0$

כאשר:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

∞ אם A לא הפיכה

1-1 אם A כן הפיכה

כדי ש-A תהיה הפיכה נעשה באמצעות הדטרמיננטה של A

(כזכור ש- $|A|=0 \Leftrightarrow A$ אינה הפיכה)

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a+2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= a+2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

לכן $|A|=0$

אם ורק אם $a = -2 \,/\, 1$

אז ורק אז יש ∞ פתרונות

תזכורת:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \boxed{A_{11}} & & \end{pmatrix}$$ אזי $|A| = |A_{11}|$ כאשר A_{11} היא המטריצה המתקבלת ע"י מחיקת שורת 1 ועמודת 1.

הוכחה:

אלמנט ניטרלי לא מתאפס בהכרח 0 ?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

$n!$ - מספר התמורות שמשלימות את 1 לפעולה.

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$ נסמן

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$ נשים לב כי תמורה

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & n \\ \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$ נסמן את σ'

כיון ש-1 נשארת קבועה, שאר התמורות נותנות בדיוק אותם מחוברים

$$|A_{11}| = |A| = \sum_{\sigma'} \operatorname{sign}(\sigma')\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \quad \operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma')$$

נגדיר התאמה בקבוצת האלמנטריות

לכל פעולה שורה ρ

$$E = \rho(I) \qquad EA = \rho(A)$$

אם $\rho = R_i \leftrightarrow R_j$

$$|E| = |\rho(I)| = -|I| = -1$$

אם $\rho = R_i : R_i + \alpha R_j$

$$|E| = |\rho(I)| = |I| = 1$$

אם $\rho = \alpha R_i$

$$|E| = |\rho(I)| = \alpha |I| = \alpha$$

טענה:

לכל E אלמנטרית פעולה אלו

$$|EA| = |E| \cdot |A|$$

הוכחה:

$\rho : R_i \leftrightarrow R_j$

$$|E| = -1 \quad |EA| = -|A|$$

$$|EA| = |E| \cdot |A| = -1 \cdot |A|$$

$\rho : R_i : R_i + \alpha R_j$

$$|E| = 1 \quad |EA| = |A| = 1 \cdot |A|$$

$\rho : \alpha R_i$

$$|E| = \alpha \quad |EA| = \alpha |A| = \alpha \cdot |A|$$

טענה:

תהי A ריבועית. A הפיכה $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

הוכחה:

כיוון ← A ריבועית. הוא הפיכה $\Leftrightarrow CF(A) = I$

נניח ש A הפיכה לכן $CF(A) = I$

לכן קיימת מטריצה בצורת קנ"ש $I = A \cdot E_1 \cdots E_k$

$$|E_k \cdots E_1 \cdot A| = |I| = 1$$

כאשר שוויון קיבלנו:

$$|E_k| \cdot |E_{k-1} A| = 1$$

נשים לב מתוך:

$$|A| \cdot |E_1| \cdots |E_{k-1}| \cdot |E_k| = 1$$

לכן $|A| \neq 0$

כיוון → נניח ש $|A| \neq 0$ ונוכיח ש A הפיכה

A לא הפיכה לכן בצורת השלבים יש שורת אפסים

לכן $|CF(A)| = 0$ ($CF(A)$ משולשית יש 0 באלכסון).

שזה נקבל $|A| |E_1| \cdots |E_k| = 0$

הוכחנו שלפי: $|E_i| \neq 0$ לכן $|A| = 0$.

טענה:

תהיינה A, B ריבועיות אזי $|AB| = |A| \cdot |B|$

הוכחה:

אם אחת מהן A, B אינה הפיכה אזי AB אינה הפיכה

אזי $|AB| = 0$ ומתקיים $|A||B| = 0$ כי אחת מהן 0.

בהפך אם שתיהן הפיכות: אזי נתון פירוקן כמכפלה של מטריצות פשוטות

אזי $A = E_1 \cdots E_k$, $B = F_1 \cdots F_m$

$$|A| = |E_1| \cdots |E_k| \qquad |B| = |F_1| \cdots |F_m|$$

$$|AB| = |E_1| \cdots |E_k| |F_1| \cdots |F_m| = |AB| \quad \blacksquare$$

דוגמא:

תהיינה $A \in \mathbb{R}^{5\times 6}$ $B \in \mathbb{R}^{6\times 5}$

הוכיחו/הפריכו: $|BA| = 0$

תזכורת: היא השוויון $|AB| = |A|\cdot|B| = |BA|$

★ מכפלה של הפכית אינה הפיכה, נכונה עבור ריבועיות

$$(1,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (1) \quad \checkmark \qquad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1,0) \quad \times$$

הוכחה:

$\text{rank } A \leq 5$

$\text{rank } B \leq 5$

$\text{rank } BA \leq 5$

6×6 BA הפיכה $\Leftrightarrow$ $\text{rank } BA = 6$

לכן BA לא הפיכה ולכן $|BA| = 0$

שאלה:

עבור מטריצה בסיסית $|E^t| = |E|$

הוכחה: תרגיל בית 🔒

מסקנה:

$$|A| = |A^t|$$

הוכחה:

אם A אינה הפיכה אז A^t אינה הפיכה ומתקיים $|A| = |A^t| = 0$

אם A כן הפיכה $A = E_1 \cdots E_k$

לכן $A^t = E_k^t \cdots E_1^t$

$$|A^t| = |E_k^t| \cdots |E_1^t| = |E_k| \cdots |E_1| \qquad |A| = |E_1| \cdots |E_k|$$

ניסחאת לפתח את הדטרמיננטה לפי שורה שרירותית

נסמן ב- A_{ij} את המטריצה המתקבלת ממחיקת השורה ה-i והעמודה ה-j של A (שימו לב מה קורה מינוסים).

פיתוח לפי השורה ה-i:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

פיתוח לפי העמודה ה-j:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(-1)^{2+1} \cdot 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -6 = (1 \cdot 6 - 3 \cdot 4)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

דוגמא:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

(כפי קודם).

הוכחת הנוסחא לפי שורה:

עבור $A \in F^{n\times n}$ כלשהי כך ש $n \geq i \geq 1$

נניח ❤:

$$(x_1 \ldots x_n) = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

ונסמן

$$A = \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix}$$

$$a_{i1} \begin{vmatrix} - & v_1 & - \\ - & e_i & - \\ - & v_n & - \end{vmatrix} + \ldots a_{in} \begin{vmatrix} - & v_1 & - \\ - & e_n & - \\ - & v_n & - \end{vmatrix} = |A|$$

מצד שני: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & - \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix} = |A_{11}|$

וכך j נגיע ב-

$$a_{ij} \begin{vmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & e_j & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{vmatrix} =$$

נגיע את השורה j, $j-1$ פעמים שאפשר ונוכל להמשיך להחליף $\begin{pmatrix} A^t \\ A_i \Leftrightarrow A_j \end{pmatrix}$

נגיע את השורה ה-i, $i-1$ פעמים שמעלה ונוכל להמשיך

$$= (-1)^{j-1+i-1} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \quad \blacksquare$$

מסקנה:

הכפלת עמודה שם כופלת את הדטרמיננטה ב-(-1) כך $|A| = |A^t|$

נניח ❤:

מאחר וזה, בפעם עמודה משפיעה על הדטרמיננטה כמו פעמים שורה לכך A^t

$$\begin{vmatrix} 1 & x-a & 0 \\ 1 & x-a & 1 \\ 1 & x^2-a^2 & 0 \end{vmatrix} = (x-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & (x+a) & 0 \end{vmatrix} = -(x-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & (x-a) \end{vmatrix} =$$

$$= -(x-a)\left((x-a-1)\right)$$

שאלה:

תהי A הפיכה $|A^{-1}| = ?$

פתרון:

$A \cdot A^{-1} = I$

$|A| \cdot |A^{-1}| = 1$ לכן $|A|^{-1} = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

המטריצה הצמודה adjoint:

תהי A ריבועית.

נסמן $adj(A)$ להיות המטריצה באותו סדר, המוגדרת ע"י

$$[adj(A)]_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ji}|$$

דוגמא:

נמצא את $adj^t(A)$ ואז נשתמש

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + \\ 1 & 2 & 3 \\ - & + & - \\ 4 & 5 & 6 \\ + & - & + \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$[adj^t(A)]_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

$$adj^t(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -3 & \cdots \\ 6 & \cdots \\ -3 & \cdots \end{pmatrix}$$

מה קושר את adjoint?

משפט:

$$A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = |A| \cdot I$$

דוגמא-נגד:

מצאו $B \neq 0$ כך ש- $AB = BA = 0$

עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

נסמן $B = adj(A)$

$A \cdot B = B \cdot A = |A| \cdot I = 0$ $\quad B \neq 0$

מסקנה:

אם A הפיכה

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$$

בהתן $adj(A)$, $|A|$

נתן לחשב את A^{-1}

כמו כן בהתן $|A|$, A^{-1} נתן לחשב את $adj(A)$

הוכחה למסקנה:

$$A \cdot \frac{adj(A)}{|A|} = I \quad / \cdot A^{-1}$$

מסקנה:

$|adj(A)| = ?$ אם A הפיכה

$$|A \cdot adj(A)| = |I \cdot |A||$$

$$|A| \cdot |adj(A)| = |A|^n \cdot |I| = |A|^n \leftarrow$$

מכפלת

$|C \cdot A| = C^n |A|$

$|adj(A)| = |A|^{n-1}$

על אם A הפיכה נתקן ב $|A|$.

על אם A אינה הפיכה אז $|A| = 0$

ולעיתים שכן $|adj(A)| = 0$ גם אז נכון $|adj(A)| = |A|^{n-1}$

אם $A = 0$ אז $adj(A) = 0$

אם $A \neq 0$ $\quad A \cdot adj(A) = |A| \cdot I = 0$

$A \neq 0$ עבור $adj(A)$ מתקיים 0 לפחות אחת הפיכה.

סה"כ לכל A $\quad |adj(A)| = |A|^{n-1}$

הוכחה משפט:

נוכיח ש- $A \cdot adj(A) = |A| \cdot I$

הדרך השנייה קצת...

$$[|A|I]_{ij} = \begin{cases} |A| & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$[A \cdot adj(A)]_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot [adj(A)]_{ji} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}| = |A|$$

מה קורה כאשר $i \neq j$?

$$[A \cdot adj(A)]_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} [adj(A)]_{pj} =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} a_{ip} (-1)^{p+j} \cdot |A_{jp}| =$$ דטרמיננטה של A שבמקום השורה ה-j כתבו פעם נוספת את השורה ה-i

לכן שווה 0 כי זו דטרמיננטה של מטריצה עם 2 שורות זהות

הסבר באמצעות דוגמא:

$$|B| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right| = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right| = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$