תרגיל 6

1. יהיו $R_1, ..., R_n$ חוגים. אפיינו איך נראים האידיאלים הראשוניים ב$R_1 \times ... \times R_n$.
פתרון:

נוכיח שהאידיאלים הראשוניים הם מהצורה $P = R_1 \times R_2 \times ... \times P_i \times R_{i+1} \times ... \times R_n$. כאשר P_i ראשוני בR_i. כלומר, ברכיב אחד בוחרים אידאל ראשוני, ובשאר הרכיבים בוחרים את כל החוג.

ראשית, נוכיח שאידיאל כזה הוא ראשוני.

ובכן, $R_1 \times ... \times R_n / P \cong R_1/R_1 \times ... \times R_i/P_i \times ... \times R_n/R_n \cong R_i/P_i$ שהוא חוג ראשוני.

כעת נוכיח שכל אידיאל ראשוני הוא מהצורה הזו. יהי $P = I_1 \times ... \times I_n$ אידיאל ראשוני. (כזכור, כל אידיאל הוא מכפלה של אידיאלים). נניח שיש שני רכיבים שבהם לא בחרנו את כל החוג. בה"כ $I_1 \subsetneq R_1, I_1 \subsetneq R_2$. נסתכל על האידיאלים: $R_1 \times \{0\} \times ... \times \{0\}$ ו $\{0\} \times R_2 \times \{0\} \times ... \times \{0\}$. המכפלה שלהם היא אידיאל ה0 ולכן מוכלת בP. מראשוניות, אחד האידיאלים מוכל בP. בה"כ, $R_1 \times \{0\} \times ... \times \{0\} \subseteq P = I_1 \times ... \times I_n$. אבל אז $R_1 = I_1$. סתירה.

2. הוכיחו/הפריכו: אם R חוג ראשוני ו$S \subseteq R$ תת חוג, אז S חוג ראשוני.
הוכחה:

יהי F שדה. אז $R = M_2(F)$ הוא חוג פשוט, ונסמן ב-T את תת־החוג של מטריצות משולשיות עליונות ב-R. אז T הוא לא ראשוני כי מכפלת האידאלים

$$I = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

היא אפס, אך הם כמובן שונים מאפס.

3. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: יהיו R, S חוגים, ו$\varphi : R \to S$ אפימורפיזם. אזי:
   (א) אם $P \trianglelefteq S$ אידיאל ראשוני, אז $\varphi^{-1}(P) \trianglelefteq R$ אידיאל ראשוני.
   (ב) אם $P \trianglelefteq R$ אידיאל ראשוני, אז $\varphi(P)$ אידיאל ראשוני.
   פתרון:

   i. הוכחה: יהיו A, B אידיאלים בR כך ש$AB \subseteq \varphi^{-1}(P)$. אז $\varphi(A)\varphi(B) = \varphi(AB) \subseteq P$. נשים לב שמכיוון ש$\varphi$ אפימורפיזם, אז תמונה של אידיאל היא אכן אידיאל. מראשוניות P נקבל שבה"כ, $\varphi(A) \subseteq P$. לכן $A \subseteq \varphi^{-1}(P)$.

   ii. הפרכה: ניקח $S = \mathbb{Z}_4[x]$, $R = \mathbb{Z}[x]$ ו$P = \langle x \rangle$ כך שההעתקה $\varphi : R \to S$ היא ההעתקה שעשווה מודולו 4 על המקדמים. אזי P ראשוני שR, אזל $\varphi(P) = \langle x \rangle \trianglelefteq \mathbb{Z}_4[x]$ לא ראשוני בS, כי $\mathbb{Z}_4[x]/\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_4$ לא תחום שלמות.

4. יהי $f:\, R\to S$ הומומורפיזם של חוגים קומוטטיביים (לא בהכרח על), ויהי $I \lhd S$ אידאל ראשוני. הוכיחו כי $f^{-1}(I) \lhd R$ הוא אידאל ראשוני.
פתרון:

יהיו $a,b\in R$ כך ש$ab\in\varphi^{-1}(P)$. אז $\varphi(a)\varphi(b)=\varphi(ab)\in P$. אבל P ראשוני, לכן בה"כ $\varphi(a)\in P$. מה שאומר ש$a\in\varphi^{-1}(P)$.

5. יהי R חוג כך ש$R[x]$ הוא חוג ראשוני. הוכיחו שR ראשוני.
הוכחה:

יהיו $a,b\in R$. קיים פולינום $p\in R[x]$ כך ש $apb\neq 0$. נסמן $p=\sum_{i=0}^{n} r_i x^i$. אז $apb=\sum_{i=1}^{n} ar_ibx^i$. אם קיבלנו פולינום שונה מ0 זה אומר שיש לו מקדם שונה מ0 (לפחות אחד). נניח $ar_jb\neq 0$. $r_j\in R$, לכן הוכחנו שR חוג ראשוני.

6. יהיו $P_1,\dots,P_n$ אידיאלים ראשוניים בחוג R, ויהי I אידיאל שמקיים: $I\subseteq\bigcup P_i$. הוכיחו שקיים j כך ש$I\subseteq P_j$. (הדרכה: הוכיחו באינדוקציה. שימו לב שעבור איחוד של שני אידיאלים הטענה נכונה תמיד, גם בלי להניח ראשוניות).
פתרון:

נוכיח את הגרסה השקולה, שאם I אינו מוכל באף אחד מ-P_i, אז הוא לא מוכל באיחוד $\bigcup_i P_i$. נעשה זאת על ידי מציאת איבר $a\in I$ שאינו שייך לאף P_i.

הוכחה. נתחיל במקרה $n=2$. לפי ההנחה ישנם איברים $a_1\in I\setminus P_2$, $a_2\in I\setminus P_1$. אם $a_1\notin P_1$ או $a_2\notin P_2$, אז מצאנו איבר שאינו שייך ל-$P_1\cup P_2$ וסיימנו. לכן נניח כי $a_i\in P_i$. לכן $a_1+a_2\in I$, אבל לא באף P_i. הרי אם $a_1+a_2\in P_1$ נקבל ש-$a_2=(a_1+a_2)-a_1\in P_1$ שזו סתירה.

נמשיך באינדוקציה על n. לפי הנחת האינדוקציה, I אינו מוכל באף איחוד של $n-1$ אידאלים מ-$P_1,\dots,P_n$. נבחר

$$a_i\in I\setminus\bigcup_{j\neq i}P_j$$

כמו מקודם, ונוכל להניח כי $a_i\in P_i$. ניקח את האיבר $a=a_1a_2\dots a_{n-1}+a_n$ ששייך ל-I, אך לא לאיחוד $\bigcup_i P_i$. הרי אם $a\in P_n$, אז $a_1a_2\dots a_{n-1}\in P_n$, ומפני ש-$P_n$ ראשוני נקבל $a_i\in P_n$ עבור $i\leq n-1$ כלשהו, וזו סתירה לבחירת a. אילו $a\in P_i$ עבור $i\leq n-1$, אז נקבל $a_n\in P_i$, שזו שוב סתירה. $\square$

7. יהי R חוג כלשהו. הוכיחו שחיתוך של שני אידיאלים מקסימליים שונים של R אינו אידיאל ראשוני.
הוכחה:

יהיו M_1,M_2 אידיאלים מקסימליים בR. נניח בשלילה ש$P=M_1\cap M_2$ הוא אידיאל ראשוני. כידוע, $P=M_1M_2\subseteq M_1M_2$. P ראשוני ולכן בה"כ $M_1\subseteq P$. אבל $P\subseteq M_2$, לכן $M_1\subseteq M_2$. ממקסימליות M_1 נקבל $M_1=M_2$. סתירה.