פתרון תרגיל מספר 3

1. א. עלינו למצוא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(z)=\log(z^2+1)$. ניזכר שתחום ההגדרה של הפונקציה $g(z)=\log(z)$ הוא התחום $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. לכן נבדוק מתי $z^2+1\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.
$z^2+1\notin\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ אם ורק אם קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש- $z^2+1=-\lambda^2$, כלומר $z^2=-1-\lambda^2$.
לכן $z=\pm i\sqrt{1+\lambda^2}$. כיוון ש- λ עובר על כל $\mathbb{R}$, הביטוי $z=\pm i\sqrt{1+\lambda^2}$ יעבור על התחום $R=\{(0,t^2+1)\mid t\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,-t^2-1)\mid t\in\mathbb{R}\}=\{iy\mid y\geq 1 \text{ or } y\leq -1\}\subset\mathbb{C}$. לכן תחום ההגדרה של הפונקציה $f(z)=\log(z^2+1)$ הוא $\mathbb{C}\setminus R$.

2. $$(1+i)^i=\exp(i(\ln(1+i))=\exp(i(\log(1+i)+2\pi ik)=\exp(i(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+2\pi ik))$$
$$=\exp(i(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+2\pi ik))=e^{-\frac{\pi}{4}-2\pi k}(\cos\ln\sqrt{2}+i\sin\ln\sqrt{2}).$$

$$(-i)^{-i}=\exp(-i\ln(-i))=\exp(-i(\log(-i)+2\pi ik))=\exp(-i(-i\frac{\pi}{2}+2\pi ik))=\exp(-\frac{\pi}{2}+2\pi k).$$

$$\operatorname{Re}\left((1-i)^{1+i}\right)=\operatorname{Re}\left(\exp((1+i)\ln(1-i))\right)=\operatorname{Re}\left(\exp((1+i)(\log(1-i)+2\pi ik))\right)=$$
$$\operatorname{Re}\left(\exp((1+i)(\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4}+2\pi ik))\right)=\operatorname{Re}\left(\exp(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k+i(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k))\right)=$$
$$e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k}\cos(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k)=e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k}\cos(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}).$$

3. נוכיח את השוויון $\cos\left(\frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1}\right)=z$. ע"פ הגדרת $\cos$ נקבל
$$\cos\left(\frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1})\right)=\frac{1}{2}\left(\exp\left(i\frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1})\right)+\exp\left(-i\frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1})\right)\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(\exp\left(\ln(z+\sqrt{z^2-1})\right)+\exp\left(\ln(z+\sqrt{z^2-1})\right)^{-1}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\sqrt{z^2-1}+\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(z+\sqrt{z^2-1}+z-\sqrt{z^2-1}\right)=z$$

נוכיח את השוויון $\cot\left(\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)=z$:

$$\cot\Big(\frac{1}{2i}\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)=\frac{\cos\Big(\frac{1}{2i}\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)}{\sin\Big(\frac{1}{2i}\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)}=i\frac{\exp\Big(i\frac{1}{2i}\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)+\exp\Big(-i\frac{1}{2i}\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)}{\exp\Big(i\frac{1}{2i}\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)-\exp\Big(-i\frac{1}{2i}\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)}=$$

$$i\frac{\exp\Big(\frac{1}{2}\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)+\exp\Big(-\frac{1}{2}\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)}{\exp\Big(\frac{1}{2}\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)-\exp\Big(-\frac{1}{2}\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)}=i\frac{\exp\Big(\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)+1}{\exp\Big(\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)-1}$$

כאשר במעבר האחרון המונה והמכנה הוכפלו ב- $\exp\Big(\frac{1}{2}\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)$. לכן

$$\cot\Big(\frac{1}{2i}\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)=i\frac{\exp\Big(\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)+1}{\exp\Big(\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)-1}=i\frac{\frac{z+i}{z-i}+1}{\frac{z+i}{z-i}-1}=i\frac{z+i+z-i}{z+i-z+i}=z.$$

נפתור את המשוואה $\sin z=2$. נסמן $z=x+iy$ ונקבל

$$\sin(x+iy)=\frac{1}{2i}\Big(e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}\Big)=\frac{1}{2i}\Big(e^{-y+ix}-e^{y-ix}\Big)=\frac{1}{2i}\Big(e^{-y}(\cos(x)+i\sin(x))$$

$$-e^{y}(\cos(x)-i\sin(x)\Big)=\frac{1}{2}\Big(e^{-y}+e^{y}\Big)\sin(x)-\frac{i}{2}\Big(e^{-y}-e^{y}\Big)\cos(x)=2$$

לכן $\left(e^{-y}-e^{y}\right)\cos(x)=0$ ו- $\left(e^{-y}+e^{y}\right)\sin(x)=4$. מהמשוואה $\left(e^{-y}-e^{y}\right)\cos(x)=0$ נקבל ש-$y=0$ או ש- $x=\pi k+\frac{\pi}{2}$. אם $y=0$ אז $\sin(x)=2$ וזה לא יתכן. לכן $x=\pi k+\frac{\pi}{2}$ ומזה נקבל ש- $\left(e^{-y}+e^{y}\right)(-1)^k=4$ לכן k הוא מספר זוגי ומכאן נקבל את המשוואה $e^{-y}+e^{y}=4$ ששקולה ל- $e^{2y}-4e^{y}+1=0$. נסמן $t=e^{y}$ ונקבל $t^2-4t+1=0$. לכן $t=2\pm\sqrt{3}$. לכן $y=\ln(2\pm\sqrt{3})$. לסיכום, הפתרון של המשוואה $\sin z=2$ הוא $z=\frac{\pi}{2}+2\pi k+i\ln(2\pm\sqrt{3})$.

4. א. נניח ש- z הוא מספר מרוכב הנמצא בתחום ההגדרה של שני הענפים $\log_{R_1},\log_{R_2}$. אז כיוון ש- $\log_{R_1}$ ו- $\log_{R_2}$ הן הפונקציות ההפוכות של $\exp$ בתחומים R_1 ו- R_2 בהתאמה וכיוון ש- z נמצא בתחום ההגדרה של שני הענפים האלו נובע ש- $\exp(\log_{R_1}(z))=z,\ \exp(\log_{R_1}(z))=z$. לכן $\exp(\log_{R_1}(z))=\exp(\log_{R_1}(z))$ ולכן $\exp(\log_{R_1}(z)-\log_{R_1}(z))=1$. כיוון שהפתרון של המשוואה $\exp(w)=1$ הוא $w=2\pi ik$ נובע ש- $\log_{R_1}(z)-\log_{R_1}(z)=2\pi ik$ עבור k שלם.

ב. אם z_1,z_2 הם שני מספרים מרוכבים המקיימים $-\frac{\pi}{2}<Arg(z_1),Arg(z_1)<\frac{\pi}{2}$. אז כיוון ש- $Arg(z_1z_2)=Arg(z_1)+Arg(z_2)$ נובע ש- $-\pi<Arg(z_1z_2)<\pi$ ולכן הארגומנט של z_1z_2 נמצא בין $-\pi$ ל- π.

5. א. נוכיח ש- $\log(1/z)=-\log(z)$. לפי ההגדרה $\log(z)=\ln|z|+iArg(z)$ ולכן $-\log(z)=-\ln|z|-iArg(z)$. מצד שני $\log(1/z)=\ln|1/z|+iArg(1/z)$ $=-\ln|z|+iArg(1/z)$. לכן צריך להוכיח ש- $Arg(1/z)=-Arg(z)$ כאשר הארגומנטים של $1/z$ ו- z נלקחים בין $-\pi$ ל- π. אכן, כיוון ש- $-\pi<Arg(z)<\pi$ גם $-\pi<-Arg(z)<\pi$. לכן גם $-Arg(z)$ וגם $Arg(1/z)$ נמצאים בין $-\pi$ ל- π. אם נוכיח שההפרש ביניהם הוא מספר מהצורה $2\pi k$ אז נוכיח ש- $Arg(1/z)=-Arg(z)$. אכן, כיוון ש- $e^{\log(1/z)}=\frac{1}{z},\ e^{-\log(z)}=\frac{1}{e^{\log z}}=\frac{1}{z}$ נובע ש- $e^{\log(1/z)}=e^{-\log(z)}$ ומתכונות הפונקציה exp קיים מספר שלם k כך ש- $\log(1/z)=-\log(z)+2\pi ik$. לכן נקבל את השוויון: $\ln|1/z|+iArg(1/z)=-\ln|z|-iArg(z)+2\pi ik$ כלומר קיבלנו את השוויון $iArg(1/z)=-iArg+2\pi ik$ וזה מוכיח את הטענה.

ב. נבחר למשל $z=i$ אז $Arg(i)=\pi/2$, לכן $\log_R(i)=\ln|i|+i\frac{\pi}{2}=i\frac{\pi}{2}$ ולכן $-\log_R(i)=-i\frac{\pi}{2}$. מצד שני $Arg(1/i)=Arg(-i)=\frac{3\pi}{2}$ (כאשר אנו בוחרים את הארגומנט הנמצא בין 0 ל- 2π) ולכן $\log_R(1/i)=i\frac{3\pi}{2}$ ששונה מהערך של $-\log_R(i)$.