

בס"ד

מבחן באלגברה ליניארית 1 תשע"ג סמסטר קיץ מועד א

מרצה: ד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות בפירוט על כל חמשת השאלות, כל תשובה מופיעה במקומה

בשאלון. המחברות משמשות לטייטה בלבד, ולא יבדקו.

שאלה ציון

	1
	2
	3
	4
	5

ציון:

בהצלחה

ענו בפירוט בדה זה

שאלה 1 (20 נקודות)

$$\text{נתונה מערכת המשוואות} \begin{cases} 5x+10y+15z=0 \\ -2x+y+z=0 \\ 3x+21y+30z=0 \end{cases} \text{ מעל שדה הממשיים.}$$

- א. מצאו בסיס ומימד למערכת המשוואות הנ"ל. (5 נקודות)
 ב. נסמן את המרחב וקטורי הכולל את כל הפתרונות של מערכת המשוואות הנתונה ב W . נתון ש $U = \text{span}\{(1,2,1), (2,3,0), (5,8,1), (4,6,0)\}$.
 מצא בסיס ומימד ל $U \cap W$. (5 נקודות)

$$\text{ג. מצאו את הפתרון הכללי של מערכת המשוואות} \begin{cases} 5x+10y+15z=-10 \\ -2x+y+z=-3 \\ 3x+21y+30z=-27 \end{cases}$$

(5 נקודות)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 21 & 30 \end{pmatrix}$$

- ד. נתון ש $\text{Rank}A$. נמקו את תשובתכם!
 (5 נקודות)

פתרון

א. נדרג את המטריצה $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 21 & 30 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 21 & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}R_3 \rightarrow R_3]{\frac{1}{5}R_1 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}R_3 \rightarrow R_3]{\begin{matrix} 2R_1+R_2 \rightarrow R_2 \\ R_1-R_3 \rightarrow R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_3 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המשתנה החופשי הוא z . נבחר $z = 5$. נבחר $x = -1$ ו $y = -7$.

הבסיס הוא $\{(-1, -7, 5)\}$ והמימד הוא 1.

ב. תחילה נמצא בסיס למרחב וקטורי U .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\approx]{\begin{matrix} 2R_1 - R_2 \rightarrow R_2 \\ 5R_1 - R_3 \rightarrow R_3 \\ 4R_1 - R_4 \rightarrow R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\approx]{\begin{matrix} 2R_2 - R_3 \rightarrow R_3 \\ 2R_2 - R_4 \rightarrow R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הבסיס הוא $\{(1,2,1), (0,1,2)\}$.

נמצא את $U \cap W$. קיבלנו ש $\dim U = 2$.

יש למצוא סקלרים שעבורם מתקיים $\alpha(1,2,1) + \beta(0,1,2) = \gamma(-1,-7,5)$

יש לפתור את מערכת המשוואות

$$\text{נדרג את המטריצה} \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 7\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta - 5\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_1 - R_3 \rightarrow R_3 \\ 2R_1 - R_2 \rightarrow R_2 \end{smallmatrix}]{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[2R_2 - R_3 \rightarrow R_3]{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שהפתרון היחידי של המשוואה הוא הפתרון הטריטוריאלי ולכן מרחב האפס הוא $U \cap W$.

ג. יש למצוא פתרון פרטי למערכת המשוואות.

הפתרון הפרטי הוא $(1, 0, -1)$.

מסעיף א הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית הוא $\{t(-1, -7, 5) \mid t \in \mathbb{R}\}$

הפתרון הכללי של המערכת הלא הומוגנית הוא $(1, 0, -1) + t(-1, -7, 5)$.

ד. מימד מרחב הפתרונות של המשוואה $\begin{cases} 5x + 10y + 15z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \\ 3x + 21y + 30z = 0 \end{cases}$ הוא 1 ומספר

הנעלמים הוא 3 ולכן דרגת המטריצה היא 2.

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 2 (20 נקודות)

יהיו $S = \{1, x, x^2, x^3\}$, $B = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ בסיסים למרחב וקטורי $P_3(x)$.

א. חשבו את ווקטור הקואורדינאטות של $p(x) = x^3$

i. ביחס לבסיס B . (5 נקודות)

ii. ביחס לבסיס S . (5 נקודות)

ב. מצא מטריצת מעבר P מבסיס B לבסיס S . הראה שאכן

$$P[x^3]_B = [x^3]_S$$

(5 נקודות)

ג. מצא מטריצת מעבר Q מבסיס S לבסיס B . הראה שאכן

$$P[x^3]_S = [x^3]_B$$

(5 נקודות)

פתרון

א. נרשום את $p(x) = x^3$ כצירוף ליניארי של הבסיס B .

$$x^3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) + (-1) \cdot (1+x+x^2) + 1 \cdot (1+x+x^2+x^3)$$

$$[x^3]_B = (0, 0, -1, 1)$$

נרשום את $p(x) = x^3$ כצירוף ליניארי של הבסיס S .

$$[x^3]_S = (0, 0, 0, 1) \text{ ולכן } x^3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3$$

ב. נרשום כל אחד מוקטורי הבסיס B כצירוף ליניארי של S .

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$1+x = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$1+x+x^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$1+x+x^2+x^3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3$$

המטריצה המשוחלפת של מטריצת המקדמים היא מטריצת המעבר.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ נשים לב ש } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ג. המטריצה ההופכית למטריצה P היא מטריצת המעבר מבסיס S לבסיס

B .

נמצא את המטריצה ההופכית

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -R_4+R_3 \rightarrow R_3 \\ -R_4+R_2 \rightarrow R_2 \\ -R_4+R_1 \rightarrow R_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -R_3+R_2 \rightarrow R_2 \\ -R_3+R_1 \rightarrow R_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -R_2+R_1 \rightarrow R_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \text{מטריצת המעבר היא}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ נשים לב ש}$$

ענו בפירוט בדה זה

שאלה 3 (20 נקודות)

סעיף א

- תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, ונגדיר $V_A := \{B \in \mathbb{F}^{n \times n} : BA = AB\}$.
- הוכח ש V_A תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n \times n}$. (5 נקודות)
 - הוכח ש V_A סגור גם לכפל מטריצות. (5 נקודות)

סעיף ב (10 נקודות)

יהיו U, W תת-מרחבים של מרחב וקטורי V . הוכח:
אם $U \not\subset W \wedge W \not\subset U$ אז $U \cup W$ אינו תת-מרחב.

פתרון

סעיף א

i.

1. $0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$ ולכן $0 \in V_A$ ז"א $V_A \neq \emptyset$.

2. נניח ש $B_1, B_2 \in V_A$ ו $\alpha \in \mathbb{F}$.

$$B_2 A = A B_2 \iff B_2 \in V_A, B_1 A = A B_1 \iff B_1 \in V_A$$

$$(B_1 + \alpha B_2) A = B_1 A + (\alpha B_2) A = B_1 A + \alpha (B_2 A) = A B_1 + \alpha (A B_2) = A (B_1 + \alpha B_2)$$

ולכן $B_1 + \alpha B_2 \in V_A$.

ii.

נניח ש $B, C \in V_A$ ונוכיח ש $BC \in V_A$.

$$BA = AB, CA = AC \iff B, C \in V_A$$

$$BC \in V_A \iff (BC)A = B(CA) = B(AC) = (BA)C = (AB)C = A(BC)$$

סעיף ב

נניח ש $U \not\subset W \wedge W \not\subset U$.

$W \not\subset U$ ולכן $U \setminus W \neq \emptyset$ יהי $u \in U \setminus W$. $U \not\subset W$ ולכן $W \setminus U \neq \emptyset$ יהי $w \in W \setminus U$.

מכיוון ש $u \in U \setminus W$ אז $u \in U \cup W$ ומכיוון ש $w \in W \setminus U$ אז $w \in U \cup W$.

מספיק להראות ש $u+w \notin U \cup W$ ונראה שתירה למוגדרות במרחבים וקטורים.

נניח בשלילה ש $u+w \in U \cup W$ ז"א $u+w \in U$ או $u+w \in W$.

נניח ב.ה.ג.כ ש $u+w \in U$. מכיוון ש $u \in U$ ו U מרחב וקטורי קיים ל u איבר

נגדי $-u \in U$.

$-u + (u+w) = (-u+u) + w = w \notin U$ וקיבלנו שתירה למוגדרות במרחב וקטורי U .

ענו בפירוט בדה זה

שאלה 4 (20 נקודות)

סעיף א (10 נקודות)

i. תהי $E \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה אלמנטארית. אזי, לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$,

$$|EA| = |E| \cdot |A| \quad (5 \text{ נקודות})$$

ii. תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הוכיחו ש $|AB| = |A| \cdot |B|$ (5 נקודות)

סעיף ב (10 נקודות)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{נתונה המטריצה}$$

i. רשום את המטריצה A כמכפלה של מטריצות אלמנטאריות. (4 נקודות)

ii. חשב את הדטרמיננטה של A בעזרת המטריצות האלמנטאריות שקיבלת

בסעיף קודם. (3 נקודות)

iii. נתונה מטריצה $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. נתון ש $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המשוואה $Bx = 0$.

מצא את $|AB|$ (נמק את תשובתך). (3 נקודות)

פתרון

סעיף א

i.

אם E_1 מתקבלת ע"י הכפלת שורה בקבוע α שונה מאפס נקבל ש $|E_1| = \alpha$.

$$|E_1 A| = |\rho(A)| = \alpha |A| = |E_1| \cdot |A|$$

אם E_2 מתקבלת ע"י החלפת שתי שורות זו בזו נקבל ש $|E_2| = -|I| = -1$.

$$|E_2 A| = |\rho(A)| = -|A| = |E_2| \cdot |A|$$

אם E_3 מתקבלת ע"י הוספת כפולה של שורה אחת לאחרת נקבל ש $|E_3| = |I| = 1$.

$$|E_3 A| = |\rho(A)| = |A| = |E_3| \cdot |A|$$

ii.

אם A לא הפיכה אז $|A| = 0$. A לא הפיכה ולכן AB לא הפיכה ואז $|AB| = 0$.

$$\text{סה"כ נקבל ש } |AB| = |A| \cdot |B| \Leftrightarrow |AB| = 0, |A| \cdot |B| = 0 \cdot |B| = 0$$

אם A הפיכה אז ניתן לרשום את כמכפלה של מטריצות אלמנטאריות ולקבל

$$A = E_n \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1$$

$$|AB| = |E_n \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot B| = |E_n| \cdot \dots \cdot |E_2| \cdot |E_1| \cdot |B| = |A| \cdot |B|$$

סעיף ב

.i

נבצע פעולות שורה אלמנטאריות עד שנקבל את מטריצת היחידה.
עבור כל פעולת שורה אלמנטארית נרשום את המטריצה האלמנטארית המתאימה.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ המטריצה המתאימה היא } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3R_1+R_3 \rightarrow R_3} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ המטריצה המתאימה היא } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_3 \rightarrow R_2} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ המטריצה המתאימה היא } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_3 \rightarrow R_1} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ המטריצה המתאימה היא } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_3 \rightarrow R_3} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

.ii

מהסעיף הקודם

$$|A| = |E_4^{-1}| \cdot |E_3^{-1}| \cdot |E_2^{-1}| \cdot |E_1^{-1}| = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$$

.iii

מכיוון שקיים פתרון לא טריוויאלי למשוואה $Bx = 0$ נקבל שהמטריצה

$$|AB| = |A| \cdot |B| = |A| \cdot 0 = 0 \text{ ואז } |B| = 0 \text{ ולכן } B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ענו בפירוט בדרך זה

שאלה 5 (20 נקודות)

- יהי V מרחב המטריצות מסדר n מעל השדה \mathbb{R} .
נגדיר $U = \{v \in V \mid v^t = v\}$, $W = \{v \in V \mid v^t = -v\}$.
א. הוכח כי U, W תת מרחבים של V . (5 נקודות)
ב. הוכח כי $V = U \oplus W$. (10 נקודות)
ג. מצא בסיס עבור מרחב המטריצות מסדר 3 המורכב ממטריצות סימטריות ואנטי סימטריות בלבד. (5 נקודות)

פתרון

א.

נוכיח תחילה ש U, W תת מרחבים של V .
נוכיח ש U תת מרחב של V .

מטריצת האפס היא סימטרית ולכן $\vec{0} \in U$.

יהיו $u_1, u_2 \in U$ אז $u_1^t = u_1 \wedge u_2^t = u_2 \rightarrow u_1 + u_2 \in U$. $(u_1 + u_2)^t = u_1^t + u_2^t = u_1 + u_2$.

יהי $u \in U, \alpha \in \mathbb{R}$ אז $u^t = u$. $(\alpha u)^t = \alpha u^t = \alpha u \rightarrow \alpha u \in U$.

על פי המשפט המקוצר U תת מרחב של V .

נוכיח ש W תת מרחב של V .

יהיו $w_1, w_2 \in W$ אז $w_1^t = -w_1 \wedge w_2^t = -w_2$.

$(w_1 + w_2)^t = w_1^t + w_2^t = -w_1 - w_2 = -(w_1 + w_2) \rightarrow w_1 + w_2 \in W$.

יהי $w \in W, \alpha \in \mathbb{R}$ אז $w^t = -w$. $(\alpha w)^t = \alpha w^t = -\alpha w \rightarrow \alpha w \in W$.

על פי המשפט המקוצר W תת מרחב של V .

ב.

נוכיח ש $U \cap W = \{0\}$.

$$A \in U \cap W \rightarrow A \in U \wedge A \in W \rightarrow A = A^t \wedge -A = A^t$$

$$A = -A \rightarrow 2A = 0 \rightarrow A = 0$$

נוכיח ש $U + W = V$. יהי $A \in V$.

$$B = \frac{1}{2}(A + A^t) \text{ נשים לב ש } B^t = B \text{ ולכן } B \in U$$

$$C = \frac{1}{2}(A - A^t) \text{ נשים לב ש } C^t = -C \text{ ולכן } C \in W$$

סה"כ קיבלנו ש $A = B + C \in U + W$, אז $U + W = V$.

סעיף ג

תחילה שלושת האיברים הסימטריים מהבסיס הסטנדרטי הם:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נשאר להציג את ששת האיברים הנותרים באמצעות מטריצות סימטריות ואנטי סימטריות.

נשתמש ברעיון של סעיף קודם, ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ז"א

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

באותו אופן נקבל ש

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן הבסיס המבוקש הוא:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$