פתרון תרגיל מספר 3

1. נגדיר $f(z)=f(x+iy)=x^2(1+i)+y^2(1-i)$.

א. באילו נקודות $f'(z)$ קיימת?

ב. באילו נקודות $f'(z)$ אנליטית? (כלומר נקודות שבהן קיימת סביבה שלמה שבה f גזירה).

פתרון: אם $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ אז $u(x,y)=(1+i)x^2$ ו- $v(x,y)=(1-i)y^2$. נבדוק באילו נקודות $z=(x,y)$ מתקיימות משוואות קושי רימן:

$$2(1+i)x=u_x=v_y=2(1-i)y$$

$$0=u_y=-v_x=0$$

לכן משוואות קושי רימן מתקיימות כאשר $(1+i)x=(1-i)y$, או $y=\frac{(1+i)x}{1-i}=ix$. כעת אם $x\neq 0$ אז נקבל ש- $y=ix\notin\mathbb{R}$ וזה לא יתכן (כי y ממשי). לכן בהכרח $x=0$ ולכן גם $y=0$. לכן f גזירה רק בראשית הצירים $z=(0,0)$.

ב. הפונקציה f איננה אנליטית בשום נקודה כי אין אף עיגול פתוח שבו f גזירה (הפונקציה f גזירה רק בנקודה אחת, אך כל עיגול פתוח מכיל אינסוף נקודות).

2. נגדיר $f(z)=\bar{z}^2e^{2z}$, באילו נקודות $f'(z)$ קיימת?

פתרון: נתונה הפונקציה $f(z)=\bar{z}^2e^{2z}$, יש לבדוק באיזה נקודות f גזירה. קודם נשים לב שאם $g(z)=p(z)h(z)$ כאשר p היא פונקציה גזירה ו- $p(z)\neq 0$ לכל z, אז g פונקציה גזירה בנקודה $z=z_0$ אם ורק אם h היא פונקציה גזירה בנקודה $z=z_0$. אכן, אם h גזירה ב- $z=z_0$, כלומר $h'(z_0)$ קיים, אז

$$g'(z_0)=p'(z_0)h(z_0)+p(z_0)h'(z_0)$$

ולכן גם $g'(z_0)$ קיים. מצד שני, אם נרשום $h(z)=p^{-1}(z)g(z)$ ונשתמש בעובדה ש- $p(z)\neq 0$ לכל z אז

$$h'(z_0)=\frac{g'(z_0)p(z_0)-g(z_0)p'(z_0)}{p^2(z_0)}$$

לכן כיוון ש- $e^{2z} \neq 0$ נקבל ש- f גזירה בנקודה $z=z_0$ אם ורק אם $\bar{z}^2$ גזירה בנקודה $z=z_0$. נבדוק באילו נקודות הפונקציה $g(z)=\bar{z}^2$ גזירה. נרשום את g בצורה של $u+iv$:

$$g(z)=g(x+iy)=\overline{(x+iy)}^2=(x-iy)^2=x^2-y^2-2ixy$$

לכן $u(x,y)=x^2-y^2$ ו- $v(x,y)=-2xy$. נבדוק באילו נקודות $z=(x,y)$ מתקיימות משוואות קושי-רימן

$$2x=u_x=v_y=-2x$$
$$-2y=u_y=-v_x=2y$$

קל לבדוק שהפתרון של המערכת הוא $x=y=0$ ולכן f גזירה רק בראשית.

3. א. הוכיחו שאם $f(z)$ ו- $\overline{f(z)}$ הן פונקציות שלמות אז f קבועה.

<u>פתרון</u>: אם $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ אז

$$\overline{f(z)}=\overline{f(x+iy)}=\overline{u(x,y)+iv(x,y)}=u(x,y)-iv(x,y)$$

כיוון ש- $f(z)$ ו- $\overline{f(z)}$ הן פונקציות שלמות נובע שצמד הפונקציות (u,v) ו- $(u,-v)$ מקיימים את משוואות קושי רימן. כלומר מתקיימות המערכות

$$u_x=v_y,\ u_y=-v_x \text{ ו-}$$
$$u_x=-v_y,\ u_y=v_x$$

כיוון ש- $u_x=\pm v_y$ ו- $u_y=\pm v_x$ נובע ש- $u_x=u_y=0$. אם נשתמש שוב במשוואות קושי רימן נקבל שגם מתקיים $v_x=v_y=0$. כלומר הפונקציות u ו- v קבועות ולכן גם f קבועה.

ב. הוכיחו שאם $f(z)$ ו- $f(\bar{z})$ הן פונקציות שלמות אז f קבועה.

<u>פתרון</u>: אם $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ אז

$$f(\bar{z})=f(\overline{x+iy})=f(x-iy)=u(x,-y)+iv(x,-y)$$

כיוון ש- $f(z)$ ו- $f(\bar{z})$ הן פונקציות שלמות נובע שצמד הפונקציות $(u(x,y),v(x,y))$ ו- $(u(x,-y),v(x,-y))$ מקיימים את משוואות קושי רימן. כלומר מתקיימות המערכות

$$u_x(x,y)=v_y(x,y),\ u_y(x,y)=-v_x(x,y) \text{ ו-}$$
$$\partial_1 u(x,-y)=u_x(x,-y)=v_y(x,-y)=-\partial_2 v(x,-y),$$
$$-\partial_2 u(x,-y)=u_y(x,-y)=-v_x(x,-y)=-\partial_1 v(x,-y)$$

כאשר האופרטורים ∂_1 ו- ∂_2 מסמנים גזירה לפי המשתנה הראשון והשני בהתאמה.

כעת נשים לב שהמשוואה $\partial_1 u(x,-y) = -\partial_2 v(x,-y)$ נכונה לכל $x, y \in \mathbb{R}$ ולכן ניתן להחליף את הערך $-y$ בערך y, כלומר $\partial_1 u(x,y) = -\partial_2 v(x,y)$. כיוון שגם מתקיים $u_x(x,y) = v_y(x,y)$ שזה שקול למשוואה $\partial_1 u(x,y) = \partial_2 v(x,y)$ נובע ש- $\partial_1 u(x,y) = \pm\partial_2 v(x,y)$, לכן $\partial_1 u(x,y) = 0$. באותו אופן ניתן להראות שמתקיים $\partial_2 u(x,y) = 0$ ולכן $u = u(x,y)$ היא פונקציה קבועה. לכן ממשוואות קושי רימן גם $v = v(x,y)$ היא פונקציה קבועה ולכן גם f היא פונקציה קבועה.

4. נניח ש- f היא פונקציה אנליטית בעיגול $|z| < R$, הוכיחו שגם הפונקציה $\overline{f(\bar{z})}$ אנליטית שם.

<u>פתרון</u>: אם f נתונה לפי $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ אז

$$f(\bar{z}) = f(x,-y) = u(x,-y) + iv(x,-y)$$

ולכן

$$\overline{f(\bar{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y)$$

נבדוק שהפונקציות

$$p(x,y) = u(x,-y) \text{ ו- } q(x,y) = -v(x,-y)$$

מקיימות את משוואות קושי רימן (בהנחה ש- u ו- v מקיימות את משוואות קושי רימן).

אכן

$$\frac{\partial}{\partial x} p(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,-y) = \partial_1 u(x,-y),$$
$$\frac{\partial}{\partial y} q(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y} v(x,-y) = \partial_2 v(x,-y)$$

כיוון ש- u ו- v מקיימות את משוואות קושי רימן מתקיים $\partial_1 u(x,-y) = \partial_2 v(x,-y)$ ולכן $\frac{\partial}{\partial x} p(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} q(x,y)$. כעת נבדוק את המשוואה השנייה:

$$\frac{\partial}{\partial y} p(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x,-y) = -\partial_2 u(x,-y),$$
$$\frac{\partial}{\partial x} q(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x} v(x,-y) = -\partial_1 v(x,-y)$$

כיוון ש- u ו- v מקיימות את משוואות קושי רימן מתקיים $\partial_2 u(x,-y) = -\partial_1 v(x,-y)$ ולכן

$\frac{\partial}{\partial x} q(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y} p(x,y)$. לכן גם p ו- q מקיימות את משוואות קושי רימן.

5. נניח ש- $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה שלמה, נניח שבכל מקום $u_x=u_y$. הוכיחו שבהכרח f היא פונקציה לינארית מהצורה $f(z)=az+b$.

<u>פתרון</u>: התנאי לכך ש- f היא פונקציה לינארית שקול לכך ש- $f''(z)=0$ לכל z מרוכב. נזכור שאם f אנליטית אז גזירה לפי המשתנה z שקולה לגזירה לפי המשתנה x. כלומר עלינו להראות ש- $f_{xx}(z)=f_{xx}(x+iy)=0$.

אם נרשום את f כסכום של חלק ממשי וחלק מדומה, כלומר

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

אז התנאי $f_{xx}(z)=0$ שקול לכך ש-

$$f_{xx}(z)=f_{xx}(x+iy)=u_{xx}(x,y)+iv_{xx}(x,y)=0$$

כלומר התנאי ש- $f_{xx}(z)=0$ שקול לכך ש- $u_{xx}(x,y)=0,\ v_{xx}(x,y)=0$.

לכן אם נוכיח ש- $u_{xx}=v_{xx}=0$ אז הטענה תוכח. אכן, ממשוואות קושי רימן:

$$u_x=v_y,\ u_y=-v_x$$

לכן, אם נשתמש גם בנתון ש- $u_x=u_y$ נקבל ש- $u_x=-v_x$. אם נגזור את המשוואה $u_x=v_y$ לפי המשתנה x ואת המשוואה $u_x=-v_x$ לפי המשתנה y ונחבר, נקבל

$$u_{xx}+u_{xy}=v_{yx}-v_{xy}=0$$

לכן נקבל ש- $u_{xx}=-u_{xy}$. אבל מהמשוואה $u_x=u_y$ נקבל $u_{xx}=u_{xy}$, כלומר $u_{xx}=\pm u_{xy}$ ולכן $u_{xx}=0$.

מכאן נקבל ש-

$$v_{xx}=(v_x)_x=(-u_y)_x=(-u_x)_x=-u_{xx}=0$$

לכן הוכחנו את הטענה.

6. א. הוכיחו את הזהות $\frac{d}{dz}\frac{d}{d\bar{z}}=\frac{d}{d\bar{z}}\frac{d}{dz}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$

ב. תהי $f=f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום $D\subseteq\mathbb{C}$. עבור $z=x+iy\in D$ נגדיר

$$h(x,y)=\left|f(x+iy)\right|^2=\left|f(z)\right|^2$$

הוכיחו שב- D מתקיים $h_{xx}+h_{yy}=4\left|f'(z)\right|^2$.

<u>פתרון</u>: א. מהגדרת האופרטורים $\frac{d}{dz}$ ו- $\frac{d}{d\bar{z}}$ נקבל

$$\frac{d}{dz}\frac{d}{d\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+i\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-i\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

ב. נשתמש בסעיף א' כדי לחשב את $h_{xx}+h_{yy}$:

$$h_{xx}(z)+h_{yy}(z)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)h(z)=4\frac{d}{dz}\frac{d}{d\bar{z}}\left|f(z)\right|^2=4\frac{d}{dz}\frac{d}{d\bar{z}}f(z)\overline{f(z)}$$

$$=4\frac{d}{dz}\left(\left(\frac{d}{d\bar{z}}f(z)\right)\overline{f(z)}+\left(\frac{d}{d\bar{z}}\overline{f(z)}\right)f(z)\right)=4\frac{d}{dz}\left(\left(\frac{d}{d\bar{z}}\overline{f(z)}\right)f(z)\right)$$

$$=4\frac{d}{dz}\left(\left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}}\right)f(z)\right)=4\frac{d}{dz}\left(\overline{\left(\frac{df}{dz}\right)}f(z)\right)=4\left(\left(\frac{d}{dz}\overline{\left(\frac{df}{dz}\right)}\right)f(z)+\overline{\left(\frac{df}{dz}\right)}\frac{df}{dz}\right)$$

$$=4\left(\overline{\left(\frac{d}{d\bar{z}}\frac{df}{dz}\right)}f(z)+\overline{\left(\frac{df}{dz}\right)}\frac{df}{dz}\right)=4\left(\overline{\left(\frac{d}{dz}\frac{df}{d\bar{z}}\right)}f(z)+\overline{\left(\frac{df}{dz}\right)}\frac{df}{dz}\right)=4\left(0+\overline{\left(\frac{df}{dz}\right)}\frac{df}{dz}\right)$$

$$=4\overline{\left(\frac{df}{dz}\right)}\frac{df}{dz}=4\left|\frac{df}{dz}\right|^2=4\left|f'(z)\right|^2$$

והוכחנו את השוויון בשאלה.