פתרון מבחן דמה – חדו"א 2 לאודיסאה –27/06/22

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. נביט בפונקציה

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$$

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

כיוון שמדובר בטור חזקות, על מנת למצוא את תחום ההתכנסות (והרי זה תחום ההגדרה של פונקצית הגבול), אפשר למצוא את רדיוס ההתכנסות ולבדוק את הקצוות.

$$R=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}}=\lim\sqrt[n]{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim\sqrt[n]{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{1}=1$$

מדובר בטור חזקות סביב אפס עם רדיוס התכנסות אחד, ולכן תחום ההתכנסות הוא כמעט $(-1,1)$ אבל(!) צריך לבדוק מה קורה בקצוות.

נציב $x=-1,1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

זה טור מתבדר כי הוא שווה לטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

מתכנס כי מדובר בטור לייבניץ – סימנים מתחלפים, וגודל האיברים $\frac{1}{n+1}$ יורד לאפס (מכנה עולה, הביטוי קטן).

סה"כ תחום ההתכנסות הוא $[-1,1)$

ב. הביעו את $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ באמצעות פונקציות אלמנטריות.

צריך לחשב את פונקציה הגבול $f(x)$

נתחיל בטור ההנדסי

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

נעשה אינטגרציה איבר איבר מאפס עד x

$$-\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

האיבר הראשון בטור הוא x ולכן מותר לחלק את כל הטור בx והוא ישאר טור חזקות.

$$\frac{-\ln(1-x)}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n+1}$$

שיוויון זה נכון לכל x בפנים תחום ההתכנות פרט לאפס, נשים לב שלפונקציה משמאל יש אי רציפות סליקה באפס.

סה"כ

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{-\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)}{-\frac{1}{3}}=3\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

2. נביט בסדרת הפונקציות

$$f_n(x)=e^{-nx}$$

א. מצאו את תחום ההגדרה של פונקצית הגבול של הסדרה $f(x)$.

ראשית כאשר מחשבים את פונקצית הגבול, מתייחסים לx כפרמטר קבוע ומשאיפים $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}e^{-nx}=?$$

אם $x<0$ אזי $-nx\to\infty$ ולכן $e^{-nx}\to\infty$ וזה מחוץ לתחום ההתכנסות.

אם $x=0$ אזי $e^{-nx}=1$ וזה בתחום ההתכנסות

אם $x>0$ אזי $e^{-nx}\to\{e^{-\infty}\}\to 0$ ושוב בתחום ההתכנסות.

סה"כ תחום ההגדרה של פונקצית הגבול הוא $[0,\infty)$ וכן פונקצית הגבול היא

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x>0\end{cases}$$

ב. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בתחום $[0,1]$.

פונקצית הגבול אינה רציפה בקטע $[0,1]$ ואילו הפונקציות בסדרה כן רציפות, ולכן <u>אין</u> התכנסות במ"ש בקטע.

<u>העשרה</u>: ראשית נוכיח עם ההגדרה לפי סדרת החסמים:

$$d_n=\sup_{[0,1]}\left|e^{-nx}-f(x)\right|$$

נשים לב כי ב$x=0$ נקבל כי

$$e^0 - f(0) = 1 - 1 = 0$$

ולכן הסופרמום לא יהיה בנקודה הזו (הרי אפס הוא הערך הנמוך ביותר האפשרי עבור ערך מוחלט) ולכן

$$d_n = \sup_{(0,1]} |e^{-nx} - f(x)| = \sup_{(0,1]} |e^{-nx} - 0| = \sup_{(0,1]} e^{-nx}$$

מדובר בפונקציה יורדת, הסופרמום יהיה הגבול של הקצה השמאלי

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-nx} = 1$$

ולכן $d_n \nrightarrow 0$ ואין התכנסות במ"ש

מה אם היינו שואלים על התחום $[1, \infty)$?

$$d_n = \sup_{[1,\infty)} |e^{-nx} - 0| = \sup_{[1,\infty)} e^{-nx}$$

שוב, מדובר בפונקציה יורדת, הסופרמום בקצה השמאלי ולכן

$$d_n = \mathrm{e}^{-n} \to 0$$

וכאן <u>כן</u> יש התכנסות במ"ש.

3. תהי $f: \mathbb{R}^2 \to R$ פונקציה דיפרנציאבילית בעלת נגזרות חלקיות רציפות,
ונגדיר את הפונקציה $h(t)$ להיות הנגזרת של f בכיוון $(-\sin(t), \cos(t))$ בנקודה $(\cos(t), \sin(t))$.
חשבו את האינטגרל $\int_0^\pi h(t)dt$, הביעו תשובתכם באמצעות הפונקציה f.

ראשית נחשב את הפונקציה $h(t)$

נזכור כי הנגזרת בכיוון $\vec{v}$ היא

$$f_{\vec{v}}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$$

כעת, בt הכיוון הנתון הוא $\vec{v} = (-\sin(t), \cos(t))$ שהוא כבר מנורמל! $(||\vec{v}|| = 1)$

לכן

$$h(t) = f_{\vec{v}}(\cos(t), \sin(t)) = \Big(f_x(\cos(t), \sin(t)), f_y(\cos(t), \sin(t))\Big) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) =$$

$$= f_x(\cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t)) + f_y(\cos(t), \sin(t)) \cdot \cos(t)$$

אבל לפי כלל השרשרת זה בדיוק הנגזרת של הפונקציה

$$g(t) = f(\cos(t), \sin(t))$$

(זה חוקי כי f דיפרנציאבילית)

לכן סה"כ

$$\int_0^\pi h(t)dt = \int_0^\pi g'(t)dt = [g(t)]_0^\pi = g(\pi) - g(0) = f(-1,0) - f(1,0)$$

השימוש במשפט היסודי של החדוא חוקי כי $g'(t) = h(t)$ רציפה, כי הנגזרות של f רציפות.

4. נביט בפונקציה $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

א. מצאו את משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה מעל הנקודה $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

משוואת המישור המשיק לפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה (a,b) (זו דיפרנציאבילית כצירוף של אלמנטריות) היא

$$z = f_x(a,b)x + f_y(a,b)y + C$$

$$f_x(x,y) = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

באופן דומה

$$f_y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ולכן המישור המשיק הוא

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + C$$

כיצד מוצאים את הקבוע C? צריך שהמישור המשיק יעבור בגרף הפונקציה בנקודה $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

הנקודה על הגרף היא

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

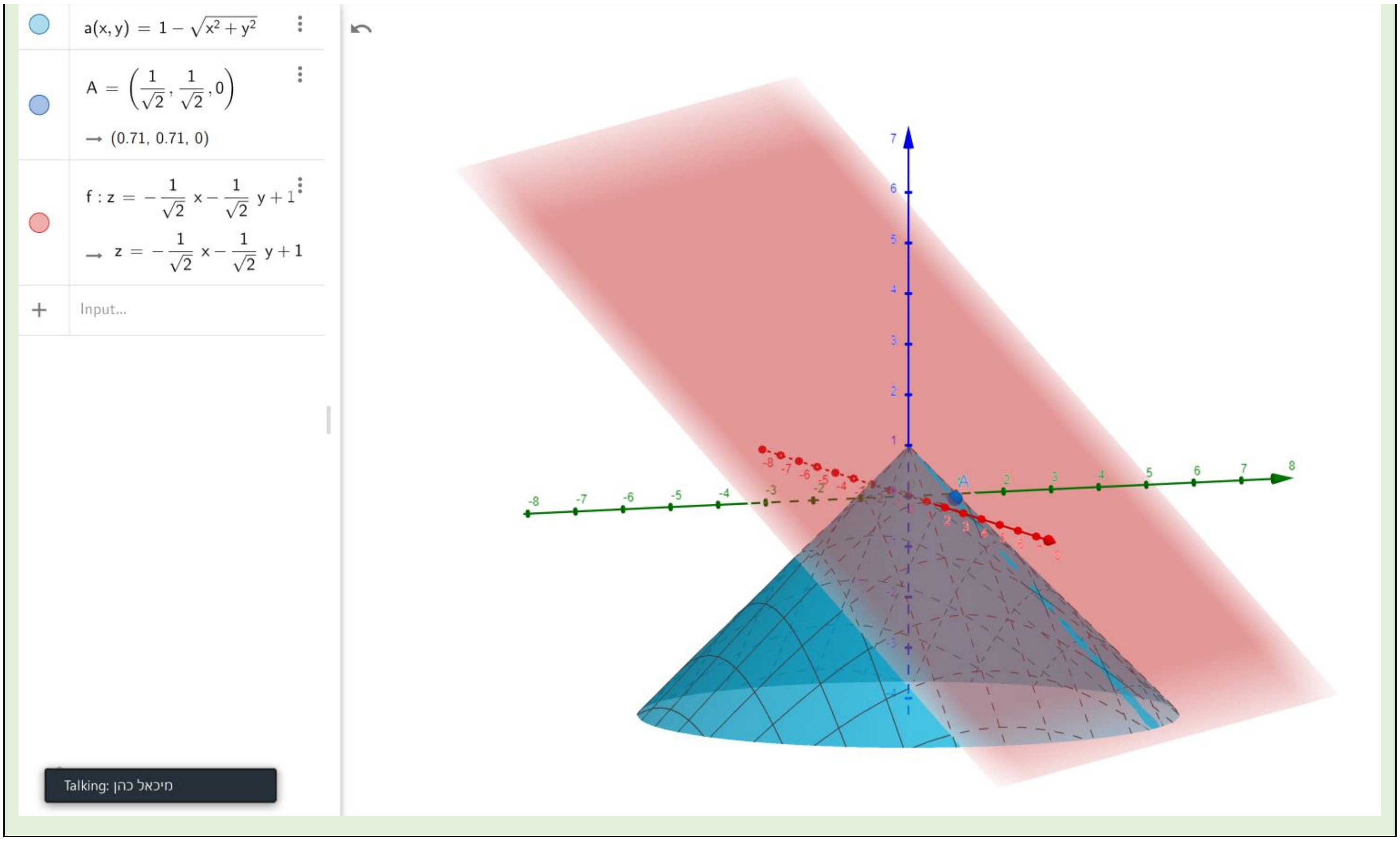
נציב את הנקודה במישור המשיק

$$0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + C$$

$$C = 1$$

סה"כ המישור המשיק הינו

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 1$$



ב. מצאו את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציה $f(x,y)$ בתחום $D=\left\{(x,y) \middle| (x-1)^2+y^2 \le \frac{1}{2}\right\}$.

ראשית נחפש נקודות חשודות בפנים התחום, כלומר נקודות בהן הגרדיאנט מתאפס.

$$\nabla f=\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

הגרדיאנט מתאפס בנקודה $(0,0)$ (לכאורה, הרי המכנה מתאפס ויש שם בעייה) אבל בכל מקרה, זה מחוץ לתחום D ולכן לא מעניין.

כעת נחפש נקודות חשודות על השפה באמצעות כופלי לגראנז'

השפה היא

$$g(x,y)=(x-1)^2+y^2-\frac{1}{2}=0$$

ולכן משוואות כופלי לגראנז' הן

$$\begin{cases} f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \\ g=0 \end{cases}$$

כאשר

$$\nabla g = (2(x-1), 2y)$$

כמו כן, $\nabla g = (0,0)$ בנקודה $(1,0)$ שהיא אינה על השפה, ולכן אינה רלוונטית.

המשוואות הן

$$\begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\lambda(x-1) \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\lambda y \\ (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

נעביר אגף ונוציא גורם משותף במשוואה השנייה ונקבל

$$y\left(2\lambda + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

לכן אחד מהנכפלים צריך להיות אפס.

אם $2\lambda = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ נציב את זה במשוואה הראשונה

$$-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x-1)$$

ולכן

$$x = x - 1$$

$$0 = -1$$

סתירה.

לכן $y = 0$, נציב באילוץ

$$(x-1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$(x-1) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

נציב את זה במשוואה הראשונה, ונקבל λ כלשהו שלא ממש אכפת לנו ממנו, כי במשוואה השנייה ה$y = 0$ מאפס את λ.

מצאנו זוג נקודות חשודות

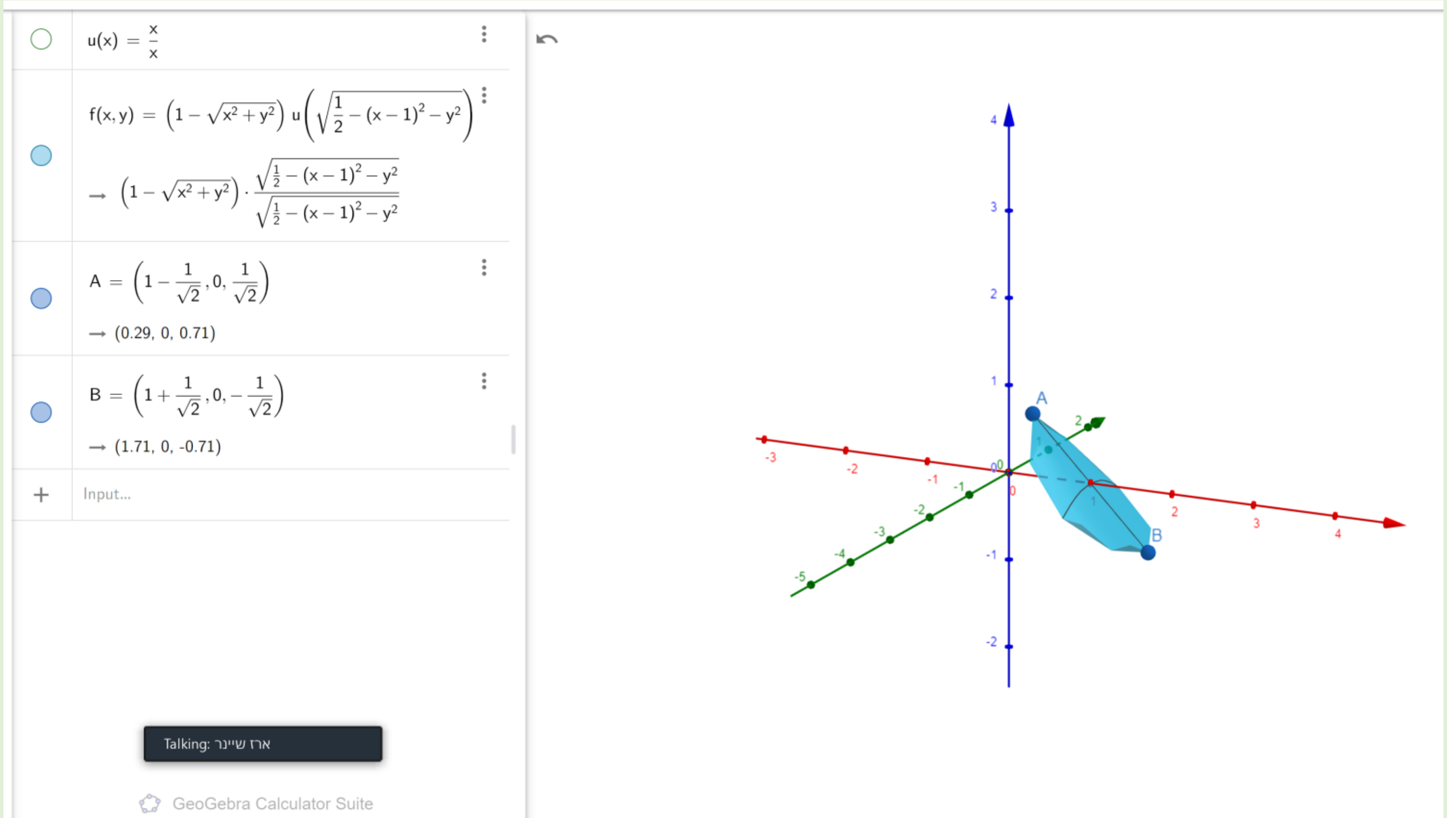
$$\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

נציב אותן בפונקציה

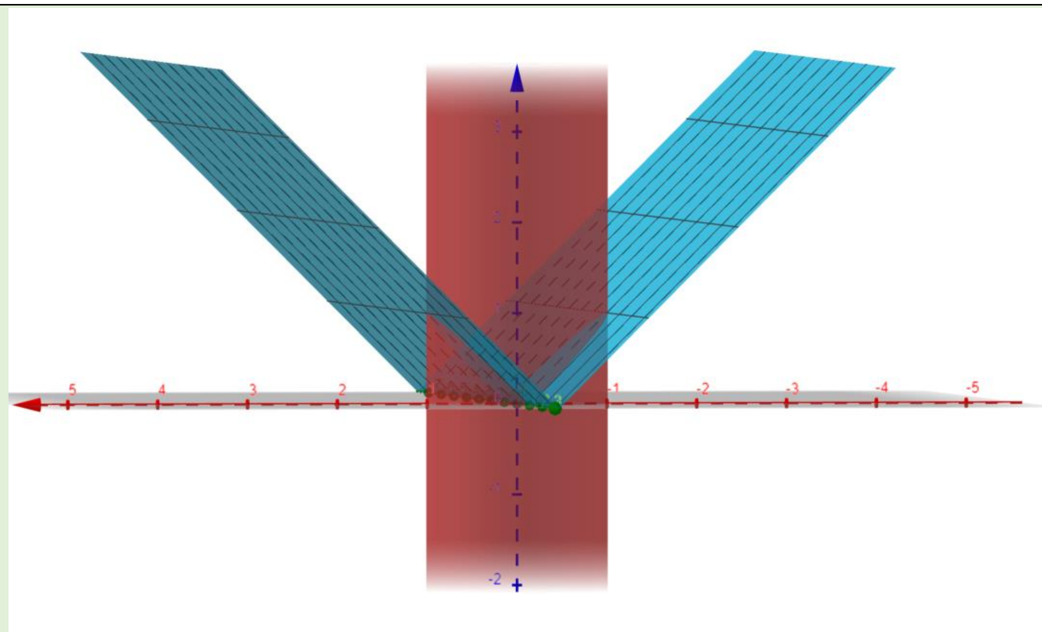
$$f\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=1-\sqrt{\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1-\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

המקסימום הוא $\frac{1}{\sqrt{2}}$

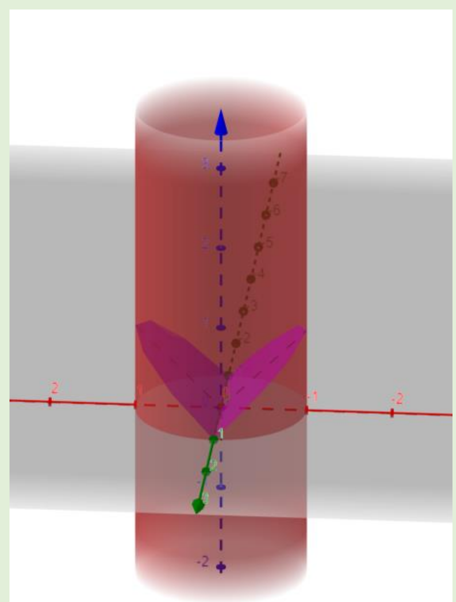
המינימום הוא $-\frac{1}{\sqrt{2}}$



5. יהי בית שתחום הרצפה שלו הוא $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ וגובה התקרה שלו הוא $f(x,y) = |x|$.
מצאו את שטח הפנים הכולל של הבית (רצפה, קירות ותקרה).



שרטוט יפה נוסף:



חישוב שטח הרצפה הוא בעצם חישוב שטח התחום D שניתן ע"י אינטגרל כפול על הפונקציה 1

$$S_1 = \iint_D 1dxdy = \pi$$

כי הרצפה היא מעגל היחידה וידוע ששטחו הוא π.

שטח קירות הבית נתון ע"י אינטגרל קווי מסוג ראשון של הפונקציה של הגובה, על המסילה שהיא השפה של התחום.

$$S_2 = \int_C f(x,y)dr$$

ראשית, צריך פרמטריזציה של השפה, במקרה זה

$$\vec{r}(t) = (\cos(t)\,, \sin(t))$$

$$t \in [0,2\pi]$$

ולכן

$$S_2 = \int_C |x| dr = \int_0^{2\pi} |\cos(t)| \cdot \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} |\cos\,(t)| dt$$

נפצל לתחומים על מנת להפטר מהערך המוחלט:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(t)\, dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t)\, dt = 4$$

(חישוב האינטגרל קל, למרות ש**מן הסתם** במבחן צריך להראות אותו).

כעת על מנת לחשב את שטח התקרה, נשתמש באינטגרל משטחי מסוג ראשון

$$S_3 = \iint_M 1 dS$$

כאשר M הוא משטח התקרה.

ראשית צריך לעשות פרמטריזציה. אבל פרמטריזציה של משטח של גרף פונקציה קלה מאד וסטנדרטית!

$$\vec{s}(x,y) = \big(x, y, f(x,y)\big) = (x, y, |x|)$$
$$(x,y) \in D$$

נחלק את התחום לשניים כאשר $x \geq 0$ וכאשר $x \leq 0$

$$D_1 = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$$

$$D_2 = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0\}$$

הפרמטריזציה על D_1 היא

$$\vec{s}(x,y) = (x, y, x)$$

$$\vec{s}_x \times \vec{s}_y = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\hat{\imath} + \hat{k}$$

$$\left|\vec{s}_x \times \vec{s}_y\right| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\iint_{M_1} 1 dS = \iint_{D_1} \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

זה כיוון שהתחום הוא חצי עיגול היחידה.

באופן דומה אפשר גם להראות כי

$$\iint_{M_2} 1dS = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

סה"כ שטח התקרה הוא

$$S_3 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\pi$$

סה"כ שטח הפנים של כל הבית הוא

$$4 + \pi + \sqrt{2}\pi = 4 + \left(1 + \sqrt{2}\right)\pi$$

6. יהיו משטחים

$$M = \left\{(x, y, z) |\ z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \le z \le 1\right\}$$

$$T = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \le 1, z = 0\}$$

ויהי שדה וקטורי

$$\vec{G} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$$

הקדמה:

נשים לב כי $M \cup T$ הוא השפה של הגוף $V \subseteq \mathbb{R}^3$

$$V = \left\{(x, y, z) | 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

לכן לפי משפט גאוס (הדיברגנץ) אם נחשב את האינטגרל המשטחי על השדה הוקטורי על השפה כאשר הנורמל כלפי חוץ המשטח נקבל את האינטגרל המשולש על הדיברגנץ:

$$\iint_{M \cup T} \vec{G} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V div\left(\vec{G}\right) dxdydz = \iiint_V \nabla \cdot \vec{G} dxdydz = 0$$

כיוון ש

$$div\left(\vec{G}\right) = \nabla \cdot \vec{G} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(1,1,1) = 0 + 0 + 0 = 0$$

לכן

$$\iint_{M \cup T} \vec{G} \cdot \hat{n} dS = 0$$

ולכן

$$\iint_M \vec{G} \cdot \hat{n} dS + \iint_T \vec{G} \cdot \hat{n} dS = 0$$

כאשר נשים לב שכיוון הנורמל הוא תמיד כלפי חוץ התחום, במקרה שלנו בתחום M הנורמל צריך להיות עם רכיב z חיובי (כמו בסעיף א', והנורמל בתחום T (שזו התחתית של הגוף) עם רכיב z שלילי (כמו בסעיף ב')

סה"כ גילינו שהאינטגרל בסעיף א' הוא מינוס האינטגרל בסעיף ב' ועל כן מספיק לחשב אחד מהם בלבד.

א. חשבו את האינטגרל המשטחי מסוג שני $\iint_M \vec{G}\cdot\hat{n}dS$ כאשר הנורמל בעל רכיב z חיובי.

נעזר במשפט סטוקס.

נמצא שדה וקטור $\vec{F}$ עבורו $\vec{G} = rot(\vec{F})$

כי אז

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \iint_M rot(\vec{F})\cdot\hat{n}dS$$

כיוון שהנורמל כלפי מעלה, השפה שהיא מעגל היחידה, צריכה להיות בכיוון נגד השעון הרגיל שאנו מכירים.

הפרמטריזציה של השפה היא

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

$$t \in [0,2\pi]$$

על מנת למצוא את $\vec{F} = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath} + R\hat{k}$ נרשום את המשוואה

$$rot(\vec{F}) = \nabla\times\vec{F} = \vec{G}$$

$$\det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \underbrace{=}_{\text{רצוי}} (1,1,1)$$

ננחש

$$R = y$$

$$P = z$$

$$Q = x$$

וואלה, הצליח!

$$\vec{F} = z\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + y\hat{k}$$

ולכן

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)dt = \int_0^{2\pi} (0, \cos(t), \sin(t))\cdot(-\sin(t), \cos(t), 0)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,dt = \pi$$

תוצאת האינטגרל נחשבת ידועה.

ב. חשבו את האינטגרל המשטחי מסוג שני $\iint_T \vec{G} \cdot \hat{n} dS$, כאשר הנורמל בעל רכיב z שלילי.

לפי כל ההקדמה, האינטגרל הוא $-\pi$

הערה: גם את אינטגרל זה אפשר לחשב לפי סטוקס כאשר השפה של המשטח היא אותה השפה כמו בסעיף קודם!

רק כיוון שהנורמל הוא כלפי מטה, הסיבוב נגד כיוון השעון הפוך מהרגיל ולכן נקבל את מינוס התוצאה הקודמת.