## פיתרון לתרגיל מספר 5:

### תשובה 1:

נגדיר את המאורעות : L : הסטודנט למד את נושא השאלה . R : הסטודנט ענה נכונה לשאלה. אנו מעונינים למצא את $P(L|R)$ כשנתון לנו ש $P(R|L)=1\,,P(L)=p$ . כמובן שחוק בייס דרוש כאן :

$$.P(L/R)=\frac{P(R/L)P(L)}{P(R)}=\frac{P(R/L)P(L)}{P(R/L)P(L)+P(R/\overline{L})P(\overline{L})}=\frac{1\cdot p}{1\cdot p+\frac{1}{m}\cdot(1-p)}$$

$$.P(L/R)=\frac{pm}{pm+(1-p)}$$

עבור $m=1$ מקבלים $P(L|R)=p$ . במקרה זה מאחר ויש רק תשובה אחת אפשרית הסטודנט בכל מקרה יענה נכונה בלי תלות האם למד או לא. לכן ההסתברות שלמד נשארת ללא שינוי ולהתנייה אין משמעות. לכל m אם הסטודנט למד את החומר הוא יענה נכון, לעומת זאת אם לא למד ההסתברות שיענה נכונה שואפת לאפס עם גדילת m . אפשר לראות זאת בצורה ברורה בפירוק שהתבצע במכנה בנוסחא שלעיל.

עבור $m\to\infty$ כצפוי

$$.\lim_{m\to\infty}P(L/R)=\lim_{m\to\infty}\frac{pm}{pm+(1-p)}=1$$

### תשובה 2:

נגדיר את המאורעות הבאים : $A$ : חולצה מיוצרת במפעל A. $B_1$ : החולצה מיוצרת במפעל B במשמרת יום . $B_2$ : החולצה מיוצרת במפעל B במשמרת לילה. C : החולצה הנבחרת פגומה.

א.

$$P(C)=P(C/A)P(A)+P(C/B_1)P(B_1)+P(C/B_2)P(B_2)$$
$$=0.2\cdot 0.4+0.1\cdot(0.7\cdot 0.6)+0.3\cdot(0.6\cdot 0.3)\approx 0.176$$

ב.

$$P(A/C)=\frac{P(C/A)P(A)}{P(C)}=\frac{0.2\cdot 0.4}{0.176}\approx 0.45$$

ג.

$$P(B_1/C)=\frac{P(C/B_1)P(B_1)}{P(C)}=\frac{0.1\cdot(0.6\cdot 0.7)}{0.176}\approx 0.24$$

ד.

$$P(B_2/C)=\frac{P(C/B_2)P(B_2)}{P(C)}=\frac{0.3\cdot(0.3\cdot 0.6)}{0.176}\approx 0.31$$

**תשובה 3:**

א. הסיכוי שחיה תנצח הוא איחוד המאורעות הבאים :

- "חיה ניצחה במשחק הראשון"
- "תיקו בראשון וחיה ניצחה בשני"
- "תיקו בראשון ובשני וחיה ניצחה בשלישי"
- 
- "תיקו בתשעת המשחקים הראשונים וחיה ניצחה בעשירי"

המאורעות כמובן זרים ולכן ההסתברות היא:

$$0.4 + 0.3\text{x}0.4 + 0.3^2\text{x}0.4 + \ldots + 0.3^9\text{x}0.4 = 0.571$$

ב. יהי X מספר המשחקים.

הסיכוי שיהיה משחק אחד בדיוק הוא הסיכוי שמישהו ינצח במשחק הראשון: P(X=1)=0.7

הסיכוי שיהיו שני משחקים הוא הסיכוי שיהיה תיקו במשחק הראשון ובמשחק השני מישהו ינצח: P(X=2) = 0.3x0.7.

הסיכוי שיהיו תשעה משחקים הוא הסיכוי שיהיה תיקו 8 פעמים ובמשחק התשיעי מישהו ינצח: $P(X=9) = 0.3^8\text{x}0.7$

הסיכוי שיהיו עשרה משחקים הוא הסיכוי שיהיה תיקו בתשעת המשחקים הראשונים (לא משנה מה תהיה התוצאה של המשחק העשירי, לא ימשיכו למשחק אחד-עשרה) :

$P(X=10)=0.3^9$

לסיכום : $P(X=k)=\begin{cases}0.3^{k-1}\cdot 0.7 & k=1,2,\ldots,9\\ 0.3^{k-1} & k=10\end{cases}$

ההתפלגות הזו דומה מאוד להתפלגות הנקראת התפלגות . בשונה מהתפלגות גיאומטרית, ההתפלגות פה נקטעת אחרי מספר מסוים של ניסיונות, והיא נקראת "גיאומטרית קטומה".

**תשובה 4:**

נגדיר מ"מ $X$ = מספר החלפות הסימן מ- $X_0$ עד ל- $X_n$ אזי $X_n=(-1)^X$. $X$ מתפלג בינומית באופן הבא: $X\sim Bin(n,1-p)$ כש $P(X=k)=\binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$.

הערכים האפשריים עבור $X_n$ הם $\{1,-1\}$ לכן צריך למצא את $P(X_n=1),P(X_n=-1)$ . נשים לב ש $P(X_n=-1)=P(\text{אי זוגי } X)$, $P(X_n=1)=P(\text{זוגי } X)$ לכן התוחלת של $X_n$ היא:

$$E(X_n)=1\cdot P(\text{זוגי } X)+(-1)\cdot P(\text{אי זוגי } X)=P(\text{זוגי } X)-P(\text{אי זוגי } X)$$

כמו כן

$$E(X_n)=E((-1)^X)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p-1)^k p^{n-k}=(2p-1)^n$$

שימו לב : במעבר הלפני אחרון $(-1)^k(1-p)^k=(p-1)^k$ ובמעבר האחרון , לפי נוסחאת הבינום $(2p-1)^n=\left((p-1)+p\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p-1)^k p^{n-k}$.

לכן $P(\text{זוגי } X) - P(\text{אי זוגי } X) = (2p-1)^n$ אבל גם $P(\text{זוגי } X) + P(\text{אי זוגי } X) = 1$

ולפי 2 המשוואות הנ"ל נקבל ש :

$$P(X_n = 1) = P(X = \text{זוגי}) = \frac{1+(2p-1)^n}{2}$$

$$P(X_n = -1) = 1 - P(X_n = 1) = \frac{1-(2p-1)^n}{2}$$

**<u>תשובה 5:</u>**

עשינו שאלה דומה בכיתה:

$$P(X=0 \mid X+Y=3) = \frac{\binom{10}{0} q^{10} \binom{5}{3} p^3 q^2}{\binom{15}{3} p^3 q^{12}} = \frac{\binom{10}{0}\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}}$$

$$P(X=1 \mid X+Y=3) = \frac{\binom{10}{1} pq^{9} \binom{5}{2} p^2 q^3}{\binom{15}{3} p^3 q^{12}} = \frac{\binom{10}{1}\binom{5}{2}}{\binom{15}{3}}$$

באופן דומה ניתן לחשב את ההסתברויות ש $X$ מקבל את הערכים 2 ו 3.

באופן כללי:

$$P(X=x \mid X+Y=3) = \frac{\binom{10}{x} p^x q^{10-x} \binom{5}{3-x} p^{3-x} q^{5-(3-x)}}{\binom{15}{3} p^3 q^{12}} = \frac{\binom{10}{x}\binom{5}{3-x}}{\binom{15}{3}}$$

**<u>תשובה 6:</u>**

א. X מתפלג בינומית $X \sim Bin(n, 0.5)$ לכן $E(X) = n \cdot 0.5$ , $Var(X) = n \cdot 0.5 \cdot (1-0.5) = n \cdot 0.25$ .
Y הינו בסיכוי 0.5 מספר הראשים שמתפלג $Bin(n, 0.5)$ ובסיכוי 0.5 מספר הזנבות שמתפלג $Bin(n, 0.5)$ לכן Y מתפלג בינומית $\sim Bin(n, 0.5)$ .

ב. נמצא את התוחלת של המשתנה המקרי $XY$ בהסתברות 0.5 הוא $X^2$ שכן בהסתברות 0.5 $Y = X$ ובהסתברות 0.5 הוא $X(n-X)$ לכן מתכונת הלינארית של התוחלת מקבלים שתוחלתו : $E(XY) = 0.5 \cdot E(X^2) + 0.5 \cdot E(nX - X^2) = 0.5 \cdot n \cdot E(X)$ . מכאן נקבל ש $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.5 \cdot n \cdot E(X) - E(X)^2 = 0$ .

ג. עבור $n>1$ אם $\mathrm{X}=0$ אזי $Y$ לא יכול לקבל ערך השונה מאפס או $n$. לכן עבור כל ערכי הביניים של Y ההסתברות המשותפת היא 0 למרות שכ"א מההסתברויות השוליות שונה מאפס.

עבור $n=1$

| | Y=0 | Y=1 | |
|---|---|---|---|
| X=0 | 0.25 | 0.25 | 0.5 |
| X=1 | 0.25 | 0.25 | 0.5 |
| | 0.5 | 0.5 | |

לכן במקרה זה הם בלתי תלויים.

**<u>תשובה 7:</u>**

א. $X_i \sim Bin(n, \frac{D_i}{N})$.

ב.

$$P(X_1 = x_1\,, X_2 = x_2) =$$

$$\binom{n}{x_1}\binom{n-x_1}{x_2}\left(\frac{D_1}{N}\right)^{x_1}\left(\frac{D_2}{N}\right)^{x_2}\left(1-\frac{D_1+D_2}{N}\right)^{n-x_1-x_2}$$

ג. מאחר ומדובר בהוצאה עם החזרה המאורעות הם בלתי תלויים. מאחר שיתכן ששני המאורעות יתרחשו יחדיו, הם אינם זרים.

ד. $X_i + X_j \sim Bin(n, \frac{D_i+D_j}{N})$.

ה. $$P(X_i = x_i\,|X_i + X_j = m) = \frac{P(X_i=x_i, X_j=m-x_i)}{P(X_i+X_j=m)}$$

$$= \frac{\binom{n}{x_i}\binom{n-x_i}{m-x_i}\left(\frac{D_i}{N}\right)^{x_i}\left(\frac{D_j}{N}\right)^{m-x_i}\left(1-\frac{D_i+D_j}{N}\right)^{n-m}}{\binom{n}{m}\left(\frac{D_i+D_j}{N}\right)^{m}\left(1-\frac{D_i+D_j}{N}\right)^{n-m}} =$$

$$\binom{m}{x_i}\left(\frac{D_i}{D_i+D_j}\right)^{x_i}\left(1-\frac{D_i}{D_i+D_j}\right)^{m-x_i}$$

לכן

$$X_i \mid X_i + X_j = m \sim Bin\left(m, \frac{D_i}{D_i+D_j}\right)$$

## תשובה 8:

נסמן X – מספר הגרביים שהוצאו.

ההסתברות ש X = 2 היא ההסתברות ששתי הגרביים הראשונות מהוות זוג: $P(X=2)=\frac{2n}{2n}\cdot\frac{1}{2n-1}$

ההסתברות ש X = 3 היא ההסתברות ששתי הגרביים הראשונות אינן זוג, אבל השלישית היא בת-זוג של אחת משתי הראשונות: $P(X=2)=\frac{2n}{2n}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2}{2n-2}$

$$P(X=3)=\frac{2n}{2n}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-2}\cdot\frac{3}{2n-3}$$

ובאופן דומה :

$$P(X=k)=\frac{2n(2n-2)(2n-4)\ldots(2n-2(k-1))(k-1)}{\frac{(2n)!}{(2n-k)!}}$$

דרך אלטרנטיבית:

נבחר מרחב מדגם שבו מתבוננים בהוצאת k-1 הגרביים הראשונות, ואח"כ את הגרב ה – k.

$$\binom{2n}{k-1}(2n-(k-1))$$

בשביל שבפעם ה – k נשלים זוג, צריך ש k-1 הגרביים הראשונות יגיעו כל-אחת מזוג אחר. נבחר את הזוגות: $\binom{n}{k-1}$ ואחר כך מכל זוג נבחר נציג: $2^{(k-1)}$ אפשרויות. בשלב האחרון נבחר בת-זוג לאחת מ – k-1 הגרביים שהוצאנו – (k-1) אפשרויות.

$$P(X=k)=\frac{\binom{n}{k-1}2^{(k-1)}(k-1)}{\binom{2n}{k-1}(2n-(k-1))}$$