משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר ראשון

תזכורת

משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון:

$$F(x,y,y')=0$$

מחפשים פונקציה (גזירה) $y(x)$ המקיימת את המשוואה

תזכורת (משפט קיום ויחידות)

תהי בעיית קושי בצורה נורמלית:

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

כאשר f רציפה בתחום $D:=\{|x-x_0|<\alpha\,,|y-y_0|<\beta\}$, ומקיימת את תנאי ליפשיץ ביחס ל – y, כלומר, לכל $|x-x_0|<\alpha$ ולכל $|y_1-y_0|<\beta$ ו - $|y_2-y_0|<\beta$, מתקיים:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<L\cdot|y_1-y_2|$$

אזי, קיים פתרון יחיד $y(x)$ המקיים את המשוואה ואת תנאי ההתחלה.

תזכורת (משוואות ניתנות להפרדה)

$$y'(x)=f(y)\cdot g(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=f(y)\cdot g(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\int\frac{dy}{f(y)}=\int g(x)\,dx+c$$

בפרט, משוואה ליניארית הומוגנית מסדר ראשון:

$$y'(x)=y\cdot g(x)$$

לכן, הפתרון הכללי:

$$y(x)=c\cdot e^{\int g(x)\,dx}$$

פתרון יחיד לבעיית קושי לינארית הומוגנית מסדר ראשון:

$$\begin{cases} y'(x) = y \cdot g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

לכן, הפתרון הפרטי:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt}$$

$$\blacksquare$$

היום, נלמד פתרון משוואות לינאריות אי הומוגניות מסדר ראשון, כלומר משוואות מהצורה: $y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$, וכן משוואות ברנולי, ריקאטי, קלרו ומשוואות הומוגנית, כלומר משוואות מהצורה $y'(x) = f(y/x)$.

משוואה לינארית כללית מסדר ראשון

$$\boxed{\begin{cases} y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}}$$

ישנן שתי שיטות לפתרון משוואות לינאריות מסדר ראשון:

1. <u>וריאציית מקדמים</u>
   א. נפתור את המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$y' = -p(x) \cdot y$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = c \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$$

   ב. ננחש פתרון למשוואה האי-הומוגנית מהצורה:

$$y(x) = c(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$$

$$\square$$

דוגמה

$$\boxed{v'(t) + \frac{b}{m} \cdot v(t) = -10}$$

כאשר, $0 < b, m \in \mathbb{R}$ קבוע.

הערה

משוואה זו מתארת מהירות גוף הנופל עם התנגדות האוויר.

עפ״י החוק השני של ניוטון:

$$m \cdot v'(t) = F = -b \cdot v(t) - 10 \cdot m$$

$$\Downarrow$$

$$v'(t)+\frac{b}{m}\cdot v(t)=-10$$

פתרון

א. נפתור את המשוואה (הלינארית) ההומוגנית המתאימה:

$$v(t)=c\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}$$

ב. נחפש פתרון מהצורה:

$$v(t)=c(t)\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}$$

נגזור ונקבל:

$$v'(t)=c'(t)\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}-\frac{b}{m}\cdot c(t)\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}$$

נציב במשוואה:

$$c'(t)\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}-\frac{b}{m}\cdot c(t)\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}+\frac{b}{m}\cdot c(t)\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}=-10$$

$$\Downarrow$$

$$c'(t)\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}=-10$$

$$\Downarrow$$

$$c'(t)=-10\cdot e^{\frac{b}{m}\cdot t}$$

נבצע אינטגרציה:

$$\int c'(t)\,dt=\int -10\cdot e^{\frac{b}{m}\cdot t}\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$c(t)=-\frac{10\cdot m}{b}\cdot e^{\frac{b}{m}\cdot t}+k$$

לכן:

$$v(t)=\left(-\frac{10\cdot m}{b}\cdot e^{\frac{b}{m}\cdot t}+k\right)\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}$$

$$\Downarrow$$

$$v(t)=-\frac{10\cdot m}{b}+k\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}$$

■

2. <u>גורם אינטגרציה</u>

דוגמה

נפתור את המשוואה:

$$xy'+y=\cos(x)$$

פתרון

עפ"י כלל השרשרת:

$$(x \cdot y)' = xy' + y$$

לכן:

$$(x \cdot y)' = \cos(x)$$

נבצע אינטגרציה:

$$\int (x \cdot y)'\,dx = \int \cos(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$x \cdot y = \sin(x) + c$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{\sin(x) + c}{x}$$

$\blacksquare$

הערה

למשוואה $y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$ תמיד קיים גורם אינטגרציה:

$$I(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

$$\Downarrow$$

$$I'(x) = p(x) \cdot I(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(y(x) \cdot I(x)\right)' = y'(x) \cdot I(x) + y(x) \cdot p(x) \cdot I(x)$$

$\blacksquare$

פתרון

$$I(x) = e^{\frac{b}{m} \cdot t}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(v(t) \cdot e^{\frac{b}{m} \cdot t}\right)' = -10 \cdot e^{\frac{b}{m} \cdot t}$$

$$\Downarrow$$

$$v(t) \cdot e^{\frac{b}{m} \cdot t} = -\frac{10 \cdot m}{b} \cdot e^{\frac{b}{m} \cdot t} + k$$

$$\Downarrow$$

$$v(t) = \left(-\frac{10 \cdot m}{b} \cdot e^{\frac{b}{m} \cdot t} + k\right) \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t}$$

$$\Downarrow$$

$$v(t) = -\frac{10 \cdot m}{b} + k \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t}$$

$\blacksquare$

דוגמה

$$\boxed{\begin{cases} y' + \lambda \cdot y = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases} , \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

פתרון

$$I(x) = e^{\lambda \cdot x}$$

$$\Downarrow$$

$$y' \cdot e^{\lambda \cdot x} + \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} \cdot y = e^{x \cdot (\lambda + 1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(y \cdot e^{\lambda \cdot x}\right)' = e^{x \cdot (\lambda + 1)}$$

נבצע אינטגרציה:

$$\int \left(y \cdot e^{\lambda \cdot x}\right)' dx = \int e^{x \cdot (\lambda + 1)} \, dx$$

עבור $\lambda \neq -1$, נקבל:

$$y \cdot e^{\lambda \cdot x} = \frac{e^{x \cdot (\lambda + 1)}}{1 + \lambda} + c$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = \frac{e^x + c \cdot (1 + \lambda) \cdot e^{-\lambda \cdot x}}{1 + \lambda}$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = \frac{e^x + c \cdot e^{-\lambda \cdot x}}{1 + \lambda}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$1 = y(0) = \frac{1 + c}{1 + \lambda}$$

$$\Downarrow$$

$$c = \lambda$$

לכן:

$$y(x)=\frac{e^x+\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}}{1+\lambda}$$

עבור $\lambda=-1$ נקבל:

$$y\cdot e^{\lambda\cdot x}=x+c$$

$$\Downarrow$$

$$y(x)=x\cdot e^x+c\cdot e^x$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$1=y(0)=c$$

$$\Downarrow$$

$$c=1$$

לכן:

$$y(x)=(x+1)\cdot e^x$$

נחשב:

$$\lim_{\lambda\to-1}y(x)=\lim_{\lambda\to-1}\frac{e^x+\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}}{1+\lambda}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\lambda\to-1}y(x)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{\lambda\to-1}\frac{e^{-\lambda\cdot x}-x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}}{1}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\lambda\to-1}y(x)=e^x+x\cdot e^x$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\lambda\to-1}y(x)=(1+x)\cdot e^x$$

לכן, משפחת הפתרונות רציפה ב - $\lambda=-1$, וניתן להימנע מפתרון המשוואה עבור $\lambda=-1$. ■