בסיס

הגדרה

יהי (X,T) מרחב טופולוגי.

אוסף B של תתי קבוצות של X נקרא <u>בסיס</u> עבור T אם:

(א) $B \subseteq T$

(ב) לכל $U \in T$ ולכל $a \in U$ יש $V \in B$ כך ש$a \in V \subseteq U$

(ב') ניסוח שקול ל(ב) באמצעות ל"ש:

כל קבוצה פתוחה היא איחוד של קבוצות מB.

הקבוצות בB נקראות קבוצות בסיס.

טענה

הכדורים הפתוחים ב$\mathbb{R}^n$ מהצורה $B(q,r)$, $q \in \mathbb{Q}^n$, $r \in \mathbb{Q}^+$ הם בסיס לטופולוגיה של $\mathbb{R}^n$.

הוכחה

תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, $p \in U$. U פתוחה ולכן קיים $\varepsilon > 0$ כך ש$B(p,\varepsilon) \subseteq U$. קיים $a \in \mathbb{Q}^n$ כך ש$d(p,q) < \frac{\varepsilon}{2}$. ניקח $r \in \mathbb{Q}$ כך ש$d(p,a) < r < \frac{\varepsilon}{2}$, ואז

$$p \in B(a,r) \subseteq B(p,\varepsilon) \subseteq U$$

מסקנה

יש לנו פונקציה $P(B) \to T$(לקיחת איחוד) שהיא על, ולכן $|T| \leq P(\aleph_0) = \aleph$. מצד שני, $|T| \geq \aleph$ - רק הכדורים הפתוחים סביב הראשית הם בעצמה $\aleph$. לכן $|T| = \aleph$.

טענה

יהי (X,T) מ"ט, B בסיס לT, Y עוד מ"ט.

אזי לכל פונקציה $f : Y \to X$ f רציפה אם"ם לכל קבוצת בסיס $V \in B$ מתקיים ש$f^{-1}(V)$ פתוחה בY.

הוכחה

$\Leftarrow$ ברור כי $B \subseteq T$.

$\Rightarrow$ נניח שהתנאי מתקיים לכל $V \in B$, ותהי $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה כלשהי. אזי $U = \bigcup\limits_{\alpha \in I} V_\alpha$ כאשר $V_\alpha \in B$ לכל α.

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_\alpha V_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f^{-1}(V_\alpha)$$

לכן $f^{-1}(U)$ פתוחה.

תרגיל

יהי (X,T) מ"ט וB בסיס לT, ויהי $A \subseteq X$. אזי אוסף הקבוצות $\{V \cap A|\}$ הוא בסיס לטופולוגיה של A(הטופולוגיה המושרה על A מX).

בהינתן אוסף של קבוצות, נרצה לדעת אם הוא בסיס - כלומר אם אוסף האיחודים שלו מהווה טופולוגיה.

הערה: בסיסים לא סגורים תחת איחוד ולא תחת חיתוך.

משפט

תהי X קבוצה, $B \subseteq P(X)$ אוסף של תתי קבוצות.

אזי B היא בסיס לטופולוגיה על X אס"ם B מקיימת את שני התנאים הבאים:

(א) $\bigcup\limits_{V \in B} V = X$

(ב) לכל $U,V \in B$ ולכל $a \in U \cap V$ קיים $W \in B$ כך ש$a \in W \subseteq U \cap V$.

(ב') ניסוח שקול ל(ב) באמצעות ל"ש:

לכל $U,V \in B$ מתקיים ש$U \cap V$ הוא איחוד של קבוצות מB.

הוכחה

$\Leftarrow$ התנאי הכרחי: אם B בסיס לטופולוגיה T, אזי כיוון ש$X \in T$ וB בסיס לT אזי X איחוד של קבוצות מB ולכן וודאי איחוד של כל קבוצות B. וכן אם $U,V \in B$ אזי $U,V \in T$ ולכן $U \cap V \in T$ ולכן $U \cap V$ היא איחוד של קבוצות מB.

$\Rightarrow$ בהינתן אוסף B של תתי קבוצות המקיים את (א) ו(ב), נגדיר אוסף תתי קבוצות T. נראה שT היא טופולוגיה ושB בסיס עבור T. נבנה את T באופן הבא:

<u>בניה:</u> $X \supseteq U$ יהיה שייך לT אם לכל $a \in U$ יש $V \in B$ כך ש$a \in V \subseteq U$.

<u>בניה':</u> (שקול לבניה)$X \supseteq U$ יהיה שייך לT אם הוא איחוד של קבוצות מB.

ברור מהגדרת בסיס ש<u>אם</u> T היא טופולוגיה אז B בסיס עבורה, לכן נותר רק להראות שT טופולוגיה.

הוכחה שT שהגדרנו בבניה היא טופולוגיה

א. $X \in T$, $\emptyset \in T$ - $\checkmark$.

ב. יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף קבוצות כך ש$U_\alpha \in T$ לכל α. צריך להוכיח ש$\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in T$. יהי $a \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, אזי יש $\alpha \in I$ כך ש$a \in U_{\alpha_0}$. $U_{\alpha_0} \in T$ פירושו שיש $V \in B$ כך ש$a \in V \subseteq U_{\alpha_0}$, ולכן $a \in V \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$.

ג. אם נוכיח שסגור תחת חיתוכים של שתי קבוצות באינדוקציה ינבע שסגור תחת איחודים סופיים כלשהם.
יהיו $U, V \in T$, צ"ל $U \cap V \in T$.
בהינתן $a \in U \cap V$:

- $U \in T$ לכן יש $U_0 \in B$ כך ש$a \in U_0 \subseteq U$
- $V \in T$ לכן יש $V_0 \in B$ כך ש$a \in V_0 \subseteq V$

$U_0, V_0 \in B$, $a \in U_0 \cap V_0$. מהתנאי על האוסף B יש $W \in B$ כך ש$a \in W \subseteq U_0 \cap V_0$ ולכן $a \in W \subseteq U \cap V$, וזה לכל $a \in U \cap V$ - לכן $U \cap V \in T$.

מסקנה

התנאי הבא על B הוא תנאי מספיק (אך לא הכרחי) לכך שB בסיס לטופולוגיה על X.

1. X מתקבל כאיחוד הקבוצות בB.
2. אם $U, V \in B$ אז $U \cap V \in B$.

טופולוגיית מכפלה

תזכורת

יהיו $A_1, A_2, \dots A_n$ קבוצות. אזי

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots a_n \in A_n\}$$

אבל אם יש לקבוצות האלו טופולוגיה - איזו טופולוגיה נשים למכפלה?

הגדרה

יהיו $(X_1, T_1), (X_2, T_2), \dots (X_n, T_n)$ n מרחבים טופולוגיים.
אנו רוצים להגדיר טופולוגיה על הקבוצה $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.
נסמן:

$$B = \{U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n | U_1 \in T_1, U_2 \in T_2, \dots U_n \in T_n\}$$

(כלומר $B = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n$)

טענה

B אוסף של תתי קבוצות של $X_1 \times \cdots \times X_n$ קשמיים את התנאי המספיק לכך שהוא בסיס לטופולוגיה על $X_1 \times \cdots \times X_n$..

הוכחה

(א) האיחוד הוא הכל, כי $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \in B$.

(ב) אם $U_1 \times \cdots \times U_n, V_1 \times \cdots \times V_n \in B$, כלומר $\begin{matrix} U_1 \in T_1, \ldots U_n \in T_n \\ V_1 \in T_1, \ldots V_n \in T_n \end{matrix}$, אזי

$$(U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n) = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2) \times \cdots \times (U_n \cap V_n) \in B$$

הטופולוגיה T שB הוא בסיס עבורה נקראת טופולוגיית המכפלה, והיא הטופולוגיה שתמיד ניקח על מכפלה כנ"ל.

תרגילים

1. יהיו $(X_1, T_1), \ldots (X_n, T_n)$ מ"ט, ויהי B_1 בסיס לT_1, B_2 בסיס לT_2,...B_n בסיס לT_n. אזי אוסף הקבוצות $\{V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n | V_i \in B_i\}$ הוא בסיס לטופולוגיה של $X_1 \times \cdots \times X_n$(כלומר לטופולוגיית המכפלה על $X_1 \times \cdots \times X_n$ שהגדרנו כעת).
2. הטופולוגיה על $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ times}}$ מתלכדת עם הטופולוגיה הרגילה(המטרית) על $\mathbb{R}^n$.
3. $X_1, \ldots X_n, Y_1, \ldots Y_m$, $n+m$ מרחבים טופולוגיים.

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n \qquad (X_1 \times \cdots \times X_n) \times (Y_1 \times \cdots \times Y_n)$$

הראו ששתי הטופולוגיות הללו מתלכדות.

הגדרה

בהנתן קבוצות $A_1, \ldots A_n$ ישנן n העתקות טבעיות

$$P_i : A_1 \times \cdots \times A_n \to A_i$$

המוגדר כך:

$$P_i \left((a_1, \ldots a_i, \ldots a_n) \right) := a_i$$

P_i נקראת ההטלה על הרכיב הi.

טענה

יהיו $X_1, \ldots X_n$ מ"ט. אזי העתקות ההטלה $P_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$ הן רציפות ופתוחות.

הוכחה

תהי $U\subseteq X_i$ פתוחה.

$$P_i^{-1}(U)=X_1\times X_2\times\cdots\times U\times\cdots\times X_n$$

וכל קבוצה בבסיס בפרט קבוצה פתוחה.

משפט

יהיו $X_1,\ldots X_n$ ו־Y מרחבים טופולוגיים. תהי $f:Y\to X_1\times\cdots\times X_n$.
אזי f רציפה אס"ם $P_i\circ f$ רציפה לכל $1\le i\le n$.

הוכחה

$\Leftarrow$ אם f רציפה אז לכל i, $P_i\circ f$ רציפה כי P_i רציפה.

$\Rightarrow$ מטענה קודמת, מספיק לבדוק שתמונה הפוכה של <u>קבוצת בסיס</u> היא קבוצה פתוחה.

תהי $U_1\times\cdots\times U_n$ קבוצת בסיס לטופולוגיה של $X_1\times\cdots\times X_n$(כלומר U_1 פתוחה ב־X_1, U_2 פתוחה ב־X_2 וכו').

$$f^{-1}(U_1\times U_2\times\cdots\times U_n)=\{g\in Y|f(y)\in U_1\times\cdots\times U_n\}=$$

$$=\{y\in Y|P_1\circ f(y)\in U_1,P_2\circ f(y)\in U_2,\ldots P_n\circ f(y)\in U_n\}=$$

$$=\bigcap_{1\le i\le n}\{y\in Y|P_i\circ f(y)\in U_i\}=\bigcap_{1\le i\le n}\underbrace{(P_i\circ f)^{-1}(U_i)}_{\text{open}}$$

ולכן החיתוך פתוח.

■

מסקנה

יהיו $X_1,\ldots X_n$ מ"ט ו־Y עוד מ"ט, ונניח נתונות n פונקציות רציפות

$$f_i:Y\to X_i\qquad 1\le i\le n$$

אזי הן מגדירות ביחד פונקציה

$$(f_i)_{1\le i\le n}:Y\to X_1\times\cdots\times X_n$$

(סימון אחר - $(f_1,f_2,\ldots f_n)$)

$$(f_i)_{1\le i\le n}(y):=(f_1(y),f_2(y),\ldots f_n(y))$$

אזי אם כל הf_i רציפות גם הפונקציה $(f_i)_{1\le i\le y}$ רציפה.
היא רציפה בזכות המשפט הקודם: $P_j\circ(f_i)_{1\le i\le n}=f_j$

פרק במתמטיקה בדידה

יהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף(לאו דווקא סופי) של קבוצות. נרצה להגדיר את קבוצת המכפלה שתסומן

$$\prod_{\alpha\in I}A_\alpha$$

נשים לב

ניתן לחשוב על המכפלה $A_1\times\cdots\times A_n$ כאוסף כל הפונקציות

$$\left\{f:\{1,2,\dots n\}\to A_1\cup\cdots\cup A_n\,\middle|\,\begin{matrix}f(1)\in A_1\\ f(2)\in A_2\\ \vdots\\ f(n)\in A_n\end{matrix}\right\}$$

נשים לב שזה דומה להגדרת סדרה(סופית):

$$(f(1),f(2),f(3),\dots f(n))=(a_1,a_2,\dots a_n)$$

למרות שכאן, בניגוד לסדרה, אין חשיבות לסדר.
נכליל לאוסף אינסופי: אם $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות, נגדיר

$$\prod_{\alpha\in I}A_\alpha:=\left\{f:I\to\bigcup_{\alpha\in I}A_i\,\middle|\,\forall_{\alpha\in I}f(\alpha)\in A_\alpha\right\}$$

הערות

- זוהי קבוצה של פונקציות, לא של קבוצות. למשל

$$f(1)=1\qquad f(2)=2\qquad f(3)=4$$

$$g(1)=4\qquad g(2)=2\qquad g(3)=1$$

$f\neq g$ למרות ש$f(\{1,2,3\})=g(\{1,2,3\})$, ולכן כל אחד מהם יחשב בנפרד בקבוצת הפונקציות.

- אין צורך בסדר מסויים בתוך הקבוצה - רק הכתיבה על הנייר דורשת סדר. הקבוצה I איננה קבוצה סדורה.