תרגיל 3 - מתמטיקה לכימאים ג' תש"פ (עם תיקונים)

תרגיל 1. מצאו פתרון כללי למשוואות הבאות בעזרת הצבה מסוג $v = (ax + by + c)$.

1. $y' = \tan^2(x + y + 1)$.

פתרון. נבצע הצבה $v = x + y + 1$.

$$\begin{aligned} y &= v - x - 1 \\ y' &= v' - 1 = \tan(x + y + 1) = \tan^2 v \end{aligned}$$

נפתור את המשוואה

$$v' - 1 = \tan^2 v = \frac{\sin^2 v}{\cos^2 v} = \frac{1 - \cos^2 v}{\cos^2 v} = \frac{1}{\cos^2 v} - 1$$

המשוואה הופכת ל

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos^2 v}$$

נעביר אגפים ונעשה אינטגרציה:

$$\int \cos^2 v \mathrm{d}v = \int \mathrm{d}x$$

נשתמש בזהות הטריגונוטמרית:

$$\cos^2 v = \frac{\cos 2v}{2} + \frac{1}{2}$$

נעשה אינגרציה ונקבל:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 v \mathrm{d}v = \int \frac{\cos 2v}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{d}v \\ \sin 2v + \frac{1}{2}v = x + C \end{aligned}$$

נציב $v = (x + y + 1)$ ונקבל פתרון בצורה סתומה:

$$\sin(2(x + y + 1)) - \frac{1}{2}(x + y + 1) = x + C .$$

2. $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$.

פתרון. נציב $v = y - 2x + 3$. נעביר אגפים ונגזור ונציב במשוואה המקורית ונקבל:

$$\begin{aligned} y' &= (v + 2x + 3)' = \\ &= v' + 2 = 2 + \sqrt{v} \end{aligned}$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \sqrt{v}.$$

קיבלנו משוואה פרידה נפתור אותה על ידי:

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v}} = \int \mathrm{dx}$$

ונקבל:

$$2\sqrt{v} = x + C$$

נציב $v = \sqrt{y - 2x + 3}$ ונקבל

$$2\sqrt{y - 2x + 3} = (x + C)$$

נעלה בריביע ונבעבר אגפים ונקבל:

$$y = \frac{(x + C)^2}{4} + 2x - 3$$

תרגיל 2. מצאו פתרון כללי למשוואות הבאותההצבות מסוג $\hat{y} = (y + \beta)\,, \hat{x} = (x + \alpha)$ ו $v = \frac{y}{x}$. ייתכן שיש צורך להעביר את המשוואה לצורה נורמלית לפני.

1. $(2x + y - 3)\,\mathrm{d}x + (x + y - 1)\,\mathrm{d}y = 0$.

פתרון. נעביר אגפים ונקבל:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x + y - 1}{2x + y - 3}$$

נסמן: $\hat{x} = x + \alpha$, $\hat{y} = y + \beta$. נמצא את α, β.

$$\begin{aligned} x + y - 1 &= (x + \alpha) + (y + \beta) \\ 2x + y - 3 &= 2(x + \alpha) + (y + \beta) \end{aligned}$$

נקבל:

$$\begin{aligned} -1 &= \alpha + \beta \\ -3 &= 2\alpha + \beta \end{aligned}$$

נפתור את המשוואה ונקבל:

$$\alpha = -\frac{4}{3}, \beta = \frac{1}{3}$$

נפתור את המשוואה

$$\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{x}} = \frac{\hat{x}+\hat{y}}{2\hat{x}+\hat{y}}$$

על ידי הצבה

$$.\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{x}} = v$$

נציב ונקבל:

$$.\,(v\hat{x})' = v + \hat{x}v' = \frac{\hat{x}+v\hat{x}}{2\hat{x}+v\hat{x}} = \frac{1+v}{2+v}$$

קיבלנו

$$\begin{aligned} xv' &= \frac{1+v}{2+v} - v = \frac{1+v-v\,(2+v)}{2+v} \\ &= \frac{1+v-2v-v^2}{2+v} \\ &= \frac{1-v-v^2}{2+v} \end{aligned}$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\int \frac{2+v}{1-v-v^2}\mathrm{d}v = \int \frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\hat{x}}$$

נבצע איטגרציה ונקבל:

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}v+v}{1-v-v^2}\mathrm{d}v &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{1-v-v^2}\mathrm{d}v - \int \frac{\left(1-v-v^2\right)'}{(1-v-v^2)}\mathrm{d}v \\ &= -\ln\left(1-v-v^2\right) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{1-v-v^2}\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

נחלק את $\frac{1}{1-v-v^2}$ לכסום של שברים. תחילה, נמצא את השורשים של המשוואה:

$$\begin{gathered} v^2+v-1=0 \\ \Downarrow \\ v = \frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \end{gathered}$$

נחפש פירור מהצורה:

$$\frac{1}{1-v-v^2}=\frac{a}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}-v\right)}+\frac{b}{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}-v\right)}$$
$$=\frac{-a\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}-v\right)-b\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}-v\right)}{1-v-v^2}$$

נמצמם את המכנה ונקבל:

$$1=-a\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}-v\right)-b\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}-v\right)$$

אם נציב

$$v=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

נקבל:

$$1=-a\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

נקבל:

$$1=-a\left(-\sqrt{5}\right)$$

ולכן $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$. אם נציב $v=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$ נקבל

$$1=-b\left(\sqrt{5}\right)$$

ולכן $b=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. נציב באינטרל ונקבל:

$$\frac{3}{2}\int\frac{1}{1-v-v^2}\mathrm{d}v=\frac{3}{2\sqrt{5}}\int\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}-v\right)}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}-v\right)}\right)\mathrm{d}v$$
$$=\frac{3}{\sqrt{5}}\int\frac{\mathrm{d}v}{(1-\sqrt{5}-2v)}-\frac{\mathrm{d}v}{(1+\sqrt{5}-2v)}=$$
$$=\frac{3}{2\sqrt{5}}\ln\frac{1+\sqrt{5}-2v}{1-\sqrt{5}-2v}$$

נחבר את $-\ln\left(1-v-v^2\right)$ ונציב $v=\frac{y+\frac{1}{3}}{x-\frac{4}{3}}$ ונשווה ל $\int\frac{d\hat{x}}{\hat{x}}=\ln\hat{x}+c$. נקבל

$$\ln\left(x-\frac{4}{3}\right)+C=\frac{3}{2\sqrt{5}}\ln\frac{1+\sqrt{5}-2v}{1-\sqrt{5}-2v}-\ln\left(1-v-v^2\right)$$
$$=\frac{3}{2\sqrt{5}}\ln\frac{1+\sqrt{5}-2\frac{y+\frac{1}{3}}{x+\frac{4}{3}}}{1-\sqrt{5}-2\frac{y+\frac{1}{3}}{x+\frac{4}{3}}}-\ln\left(1-\frac{y+\frac{1}{3}}{x+\frac{4}{3}}-\left(\frac{y+\frac{1}{3}}{x+\frac{4}{3}}\right)^2\right)$$

2. $y' - \frac{y}{x} = x$.

פתרון. נציב $v = \frac{y}{x}$ ונקבל:

$$y' - \frac{y}{x} = (vx)' - v = v'x + v - v = x.$$

קילנו

$$v'x = x$$

הפתרון למשוואה הוא

$$v = x + C$$

ו $y = x^2 + Cx$.

3. $(2x + y - 3) + (x + y - 1)\, y' = 0$. // הוקלקד פעמיים, זהה ל1.

4. $\frac{2x}{y^3} + \frac{y^2-3x^2}{y^4} y' = 0$.

פתרון. נעביר אגפים ונקבל:

$$\frac{y^2 - 3x^2}{y^4} y' = \frac{2x}{y^3}$$

$$y' = \frac{2xy^4}{(y^2 - 3x^2)\, y^3} = \frac{2xy}{y^2 - 3x^2}$$

נעשה שוב הצבה $v = \frac{y}{x}$ ונקבל:

$$y' = v'x + v = \frac{2x^2 v}{x^2 v^2 - 3x^2}$$

נצמצם את מהמונה ומהמכנה ונעביר את v אגף ונקבל: מהמשוואה ונקבל:=

$$v'x = \frac{2v}{v^2 - 3} - v = \frac{2v - v\left(v^2 - 3\right)}{v^2 - 3} = \frac{v^3 - 5v}{3 - v^2}$$

נפריד את המשוואה ונקבל:

$$\int -\frac{v^2 - 3}{v^3 - 5v} \mathrm{d}v = \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

נקבל:

$$\ln x + C = \int -\frac{1}{v} - \frac{2}{v^3 - 5v} \mathrm{d}v$$

נפרק את

$$\frac{2}{v^3 - 5v} = \frac{a}{v} + \frac{b}{(v - \sqrt{5})} + \frac{c}{(v + \sqrt{5})}$$

נקבל:

$$.2=a\left(v^{2}-5\right)+b\left(v+\sqrt{5}\right)v+c\left(v-\sqrt{5}\right)v$$

נפדתרו את המשוואה. אם נציב $v=0$ נקבל ש

$$2=-5a$$

ולכן $a=-\frac{5}{2}$. אם נציב $v=\sqrt{5}$ נקבל

$$2=2\sqrt{5}b$$

ונקבל $b=\frac{1}{\sqrt{5}}$. אם נציב $\mathrm{v}=-\sqrt{5}$ נקבל ב $v=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. נציב ונקבלb

$$\begin{aligned}.\int-\frac{1}{v}-\frac{2}{v^{3}-5v}\mathrm{d}v&=\int-\frac{1}{v}+\frac{5}{2v}+\frac{1}{\sqrt{5}\left(v-\sqrt{5}\right)}-\frac{1}{\sqrt{5}\left(v+\sqrt{5}\right)}\mathrm{d}v\\&=-\frac{7}{2}\ln v+\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(v-\sqrt{5}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(v+\sqrt{5}\right)\end{aligned}$$

נעלה את שני האגפים בחזקת e על מנת להפתר מ $\ln$ ונקבל:

$$.\left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{7}{2}}\left(\frac{v-\sqrt{5}}{v+\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{5}}}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{7}{2}}\left(\frac{\frac{y}{x}-\sqrt{5}}{\frac{y}{x}+\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

תזכורת: צורות רישום $A\left(x,y\right)+B\left(x,y\right)y'=0$ ו $A\left(x,y\right)\mathrm{d}x+B\left(x,y\right)\mathrm{d}y=0$ הן שקולות. (אפשר לכתוב בשתי הדרים, הכוונה היא לאותו הדבר.).
המשוואה $A\left(x,y\right)\mathrm{d}x+B\left(x,y\right)\mathrm{d}y=0$ נקראת מדוויקת אם:

$$.A\left(x,y\right)_{y}=B\left(x,y\right)_{x}$$

במקרה הזה מוציאים פתרון כללי $F\left(x,y\right)=c$, כאשר מוציאים את F בעזרת חישוב האינטגרלים

$$F\left(x,y\right)=\int A\left(x\right)\mathrm{d}x=G\left(x,y\right)+h\left(y\right)$$

ו

$$.h\left(y\right)=\int\left(B\left(x,y\right)-G_{y}\left(x,y\right)\right)\mathrm{d}y$$

הפונקציה $\mu\left(x,y\right)$ היא גורם אינטגרציה למשוואה $A\left(x,y\right)\mathrm{d}x+B\left(x,y\right)\mathrm{d}y=0$ אם מתקיים

$$\left(\mu\left(x,y\right)A\left(x,y\right)\right)_{y}=\left(\mu\left(x,y\right)B\left(x,y\right)\right)_{x}$$

או במילים אחרות המשוואה $\mu\left(x,y\right)A\left(x,y\right)\mathrm{d}x+\mu\left(x,y\right)B\left(x,y\right)\mathrm{d}y=0$ היא משוואה מדוייקת.

1. קיים גורם אינטגרציה $\mu(x)$ שתלוי ב x בלבד אם הפונקציה $\frac{A(x,y)_y - B(x,y)_x}{B(x,y)}$ תלוייה ב x בלבד. במקרה הזה מתקיים:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{A(x,y)_y - B(x,y)_x}{B(x,y)}.$$

2. קיים גורם איטנגרציה $\mu(y)$ שתלוי ב y בלבד אם $\frac{B(x,y)_x - A(x,y)_y}{A(x,y)}$ תלוייה ב y בלבד. במקרה הזה מתקיים:

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{B(x,y)_x - A(x,y)_y}{A(x,y)}.$$

3. אם לא קיים גורם אינטגרציה μ שתלוי ב x או y בלבד, אז לעיתים ניתן לנסות להציב $\mu(x,y) = x^m y^n$ ולמצוא m ו n על ידי פתרון המשוואה:

$$(x^m y^n A(x,y))_y = (x^m y^n B(x,y))_x .$$

תרגיל 3. פתרו את המשוואות הבאות. (הדרכה: הראו שהן מדוייקות, או שמצאו גורם אינטגרציה).

1. $(2x+3)\,\mathrm{d}x + (2y-2)\,\mathrm{d}y = 0$. - שאלה 1 בעמוד 54
2. $\left(3x^2 - 2xy + 2\right)\mathrm{d}x + \left(6y^2 - x^2 + 3\right)\mathrm{d}y = 0$. - שאלה 2 בעמוד 55
3. $y' = -\frac{ax+by}{bx+cy}$. - שאלה 4 בעמוד 57 .
4. $(e^x \sin y - 2y \sin x) + (e^x \cos y + 2\cos x)\, y' = 0$. שאלה 5 בעמוד 57 .
5. $\left(x^2 + y^2 + x\right)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$.

   פתרון. מתקיים $A_y = 2y, B_x = 0$. מתקיים :

$$\frac{A_y - B_x}{B} = 2$$

תלוי ב x בלבד. נמצא גורם אינטגרציה:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = 2$$
$$\Downarrow$$
$$\mu(x) = e^{2x}$$

נכפיל בגורם היאטנגרציה ונקבל:

$$e^{2x}\left(x^2 + y^2 + x\right)\mathrm{d}x = e^{2x} y\mathrm{d}y = 0.$$

נפתור את המשוואה:

$$F(x,y)=\int e^{2x}y\mathrm{d}y=e^{2x}\frac{y^2}{2}+C(x)$$

נגזור את הקפונקציה ונשווה למקדם של $\mathrm{d}x$. נקבל:

$$C'(x)=e^{2x}\left(x^2+x\right)$$

(הגורם $e^{2x}y^2$ מצטמצם).

$$C(x)=\int e^{2x}\left(x^2+x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}x^2+C$$

(על ידי אינגרציה בחלקים) והפתרון הסופי הוא $\frac{1}{2}\left(e^{2x}\left(x^2+y^2\right)\right)=C$.

6. $y(1+xy)\,\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$.

פתרון. נסמן:

$$A=y+xy^2, B=-x$$

$$A_y=1+2xy, B_x=-1.$$

לא מתקיים אף אחד מהמקרים. נחפש גורם אינטגרציה מהצורה:

$$x^m y^n$$

נרצה:

$$\left(x^m y^{n+1}+x^{m+1}y^{2+n}\right)_y=(n+1)\,y^n x^m+2\,(2+n)\,x^{m+1}y^{n+1}$$
$$-(m+1)\,x^m y^n$$

נקבל: $-m-1=n+1$. $2+n=0$. $n=-2$, $m=0$. (שימו לב, אפשר להגיע לאותה תוצאה על שקיים גורם אינגרציה שתלוי ב y בלבד כיוון ש

$$\frac{B_x-A_y}{A}=\frac{-2-2xy}{y+xy^2}=-\frac{2}{y}.$$

בכל מקרה, אחרי כפל בגורם אינטגצריה, מקבלים

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)\mathrm{d}x-\frac{x}{y}\mathrm{d}y$$

נחשב את הפונקציה:

$$F(x)=\int\left(\frac{1}{y}+x\right)\mathrm{d}x=\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+C(y)$$

נגזור לפי y ונקבל:

$$C'(y)=0\Rightarrow C(y)=C.$$

הפתרון הוא

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C.$$

7. $\left(x^2y-1\right)\mathrm{d}x+\left(x^3+x^2\cos y\right)\mathrm{d}y=0$.

פתרון. נסמן:

$$\begin{aligned}A&=\left(x^2y-1\right), B=\left(x^3+x^2\cos y\right)\\A_y&=x^2, B_x=3x^2+2x\cos y\end{aligned}$$

מתקיים:

$$\frac{A_y-B_x}{B}=\frac{-2x^2-2x\cos y}{x^3+x^2\cos y}=-\frac{2}{x}\frac{x+\cos y}{x+\cos y}=-\frac{2}{x}$$

קיבלנו:

$$\ln\mu\left(x\right)=-2\ln x$$

ולכן גורם אינטגרציה הוא $\frac{1}{x^2}$. נכפיל את המשוואה בגורם אינטגרציה שמצאנו ונקבל:

$$\left(y-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x+\left(x+\cos y\right)\mathrm{d}y=0$$

נמצא את F על ידי

$$\int\left(y-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=yx-\frac{1}{x}+C\left(y\right)$$

נגזור לפי y ונשווה למקדם של dy ונקבל:

$$C'\left(y\right)=\cos y\Rightarrow C\left(y\right)=\sin y.$$

הפתרון הכללי הוא $F\left(x,y\right)=yx-\frac{1}{x}+\sin y=C$.

תרגיל 4. מצאו פתרון כללי למשוואות הבאות.

1. $\left(2xy^2+2y\right)+\left(2x^2y+2x\right)y'=0$. שאלה 3 בעמוד 56.
2. $y'=\left(x+y\right)\left[1+\ln\left(x+y\right)\right]-1$. (שימו לב, יש טעות בשאלה המקורית)

פתרון. נבצע החפת משתנים

$$x+y=v.$$

נציב ונקבל:

$$y'=\left(v-x\right)'=v'-1=v+v\ln v-1.$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{v\left(1+\ln v\right)}\mathrm{d}v&=\int\mathrm{d}x\\u&=\ln v\\x+C=\int\frac{du}{1+u}&=\ln\left(1+u\right)\\&=\ln\left(1+\ln v\right)\\&=\ln\left(1+\ln\left(x+y\right)\right)\end{aligned}$$

נעלה בחזקה פעממים ונקבל:

$$1+\ln(x+y)=Ce^{x}$$
$$\Downarrow$$
$$x+y=e^{(Ce^{x}-1)}$$
$$\Downarrow$$
$$y=e^{(Ce^{x}-1)}-x$$

(א) $x^2y^3+\left(x+xy^2\right)y'=0$. נעביר אגפים ונקבל:

$$\int\frac{1+y^2}{y^3}\mathrm{d}y=-\int x\mathrm{d}x$$
$$\Downarrow$$
$$-\frac{y^2}{2}+\ln y=-\frac{x^2}{2}+C$$

את e בחזקת שני האגפים ונקבל:

$$e^{-\frac{y^2}{2}}y=ce^{-\frac{x}{2}^2}.$$

3. $x^2y'=y\left(x+y\right)$.

פתרון. נחלק את שני אגפי המשווא ב x ונקבל משוואה הומוגנית.

נבצע הצבה $v=\frac{y}{x}$ ונקבל:

$$v'x+v=v+v^2$$
$$v'=\frac{v^2}{x}$$

נקבל:

$$\int\frac{1}{v^2}\mathrm{d}v=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$-\frac{1}{v}=\ln x+C$$

ולכן

$$-\frac{x}{y}=\ln x+C$$
$$\Downarrow$$
$$y=-\frac{x}{\ln x+C}$$