

אלגברה לינארית 1 (88112), סמסטר קיץ תשפה, בוחן

ד' באב ה'תשפ"ה, 29/7/2025

מרצים: דניס גולקו, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, ארז שיינר.
מתרגלים: יחזקאל אימרה רגב, בוריס גוליקוב, שירה ידעי, נמרוד נדבורני, עידו פלדמן,
איתן פרימן, אביתר ישראל שויקה.
אורך המבחן: שעהיים (כולל הארכת זמן).
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על כל השאלות. ישנן 3 שאלות בבוחן. כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.

- תשובות יש לכתוב על גבי טופס הבחינה בלבד!

- נמקו תשובתכם.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטייטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

עמוד שאלות, למי שאוהב מבט כללי

1. תהא $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ מטריצה שלאחר פעולות דירוג מתקבלת המטריצה הבאה:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(א) (10 נק') מצאו את הפתרון הכללי של המערכת $Ax = 0$.

(ב) (15 נק') יהיו $v, u \in \mathbb{R}^5$ כך ש $v - u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוכיחו שלכל $b \in \mathbb{R}^4$ מתקיים: $Av = b$ אם ורק אם $Au = b$.

(ג) (10 נק') הוכיחו או הפריכו: למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ אין פתרון.

2. (15 נק' לכל סעיף) נתבונן במרחב המטריצות הריבועיות $V = \mathbb{R}^{n \times n}$. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות קבעו האם היא תת-מרחב של V או לא. הוכיחו את תשובתכם.

(א) $U = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \exists \alpha \in \mathbb{R} : A^t = \alpha A\} \subseteq V$

(ב) עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר: $W_\alpha = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^t = \alpha A\} \subseteq V$

3. (15 נק' לכל סעיף) נאמר שמטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ דומה למטריצה $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אם קיימת $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה כך ש $P^{-1}AP = B$, או באופן שקול: $AP = PB$.

(א) תהיינה $A, B, C \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכיחו שאם A דומה ל B וגם B דומה ל C אז A דומה ל C .

(ב) יהא $\alpha \in \mathbb{F}$ ותהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש $A = \alpha I$. הוכיחו או הפריכו: קיימת $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש $B \neq A$ וגם B דומה ל A .

(ג) תהא $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ מטריצה המקיימת:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

הוכיחו: A דומה ל $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. תהא $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ מטריצה שלאחר פעולות דירוג מתקבלת המטריצה הבאה:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(א) (10 נק') מצאו את הפתרון הכללי של המערכת $Ax = 0$.

(ב) (15 נק') יהיו $v, u \in \mathbb{R}^5$ כך ש $v - u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוכיחו שלכל $b \in \mathbb{R}^4$ מתקיים: אם $Av = b$ אם ורק אם $Au = b$.

(ג) (10 נק') הוכיחו או הפריכו: למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ אין פתרון.

כאן כותבים את פתרון שאלה 1, המחברת לטיוטה בלבד

דף נוסף לשאלה 1

דף נוסף לשאלה 1

2. (15 נק' לכל סעיף) נתבונן במרחב המטריצות הריבועיות $V = \mathbb{R}^{n \times n}$. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות קבעו האם היא תת־מרחב של V או לא. הוכיחו את תשובתכם.

$$U = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \exists \alpha \in \mathbb{R} : A^t = \alpha A\} \subseteq V \quad (\text{א})$$

$$W_\alpha = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^t = \alpha A\} \subseteq V \quad \text{נגדיר: } \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{ב})$$

כאן כותבים את פתרון שאלה 2, המחברת לטיוטה בלבד

דף נוסף לשאלה 2

דף נוסף לשאלה 2

3. (15 נק' לכל סעיף) נאמר שמטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ דומה למטריצה $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אם קיימת $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה כך ש $P^{-1}AP = B$, או באופן שקול: $AP = PB$.

(א) תהיינה $A, B, C \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכיחו שאם A דומה ל B וגם B דומה ל C אז A דומה ל C .

(ב) יהא $\alpha \in \mathbb{F}$ ותהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש $A = \alpha I$. הוכיחו או הפריכו: קיימת $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש $B \neq A$ וגם B דומה ל A .

(ג) תהא $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ מטריצה המקיימת:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

הוכיחו: A דומה ל $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

כאן כותבים את פתרון שאלה 3, המחברת לטיוטה בלבד

דף נוסף לשאלה 3

דף נוסף לשאלה 3