

בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ"ה, מועד א'

21.8.2025, כ"ז באב התשפ"ה

מרצים: אחיה בר-און, אריאל ויצמן, דן פלורנטיין, ארז שיינר.
מתרגלים: יחזקאל אימרה רגב, נמרוד נדבורני, שירה ידעי, הראל רוזנפלד, עידו פלדמן, בוריס גוליקוב, אביתר ישראל שויקה.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.

- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

1. (9 נקודות כל סעיף) תהיינה A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הבאים:

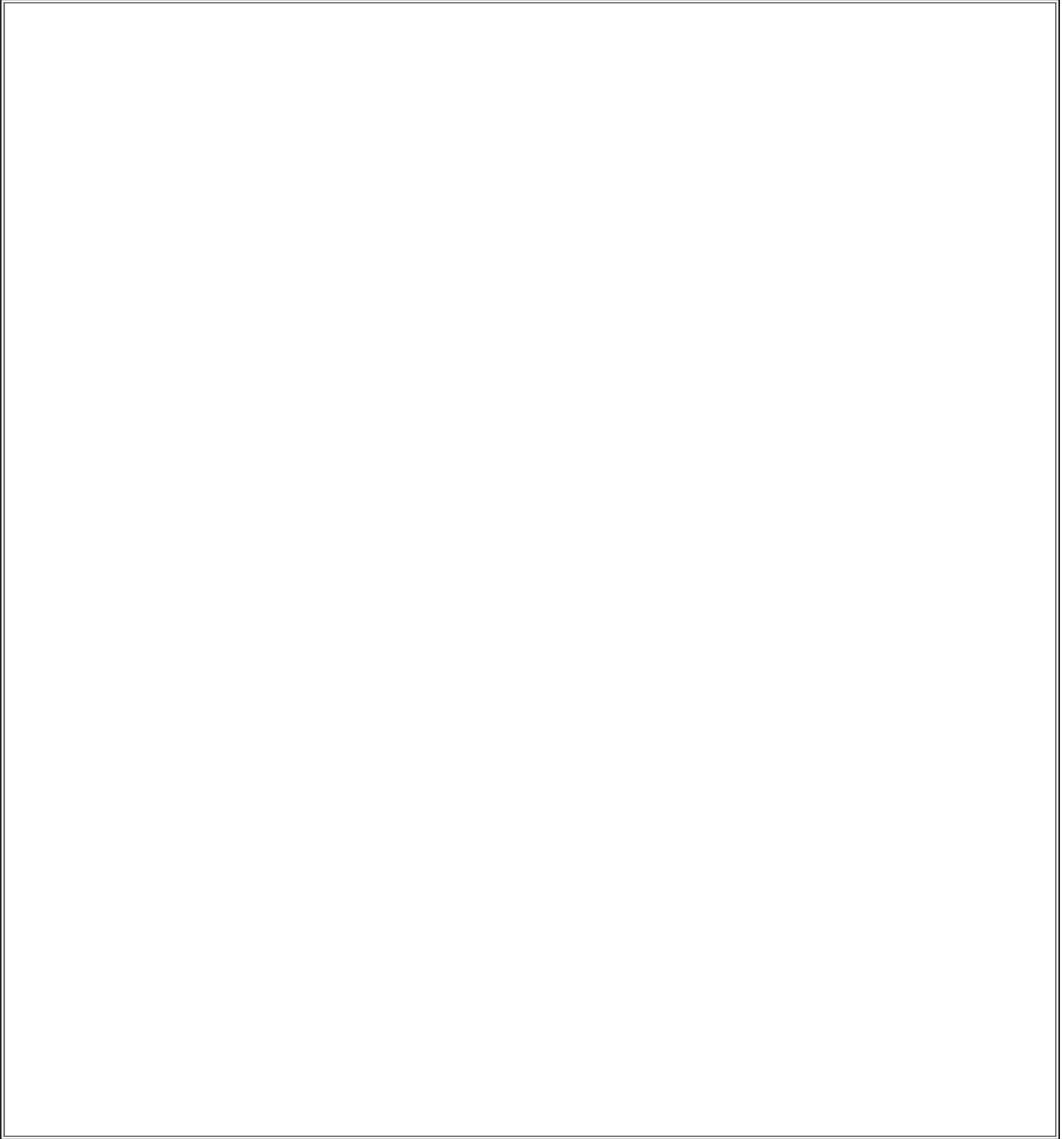
(א) אם $(A \Delta B) \subseteq (A \Delta C)$ אז $B \subseteq C$.

(ב) $(A \times B) \setminus (A \times C) = A \times (B \setminus C)$.

(ג) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$.

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____



2. (9 נקודות כל סעיף) שימו לב: במבחן הזה, 0 אינו מספר טבעי ($0 \notin \mathbb{N}$).
נגדיר פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow P(\mathbb{N})$ על ידי הכלל

$$f(x) = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{n-1} \leq x\}$$

נגדיר יחס T על $\mathbb{N}$ על ידי הכלל

$$xTy \iff f(x) = f(y)$$

ענו על הבאים:

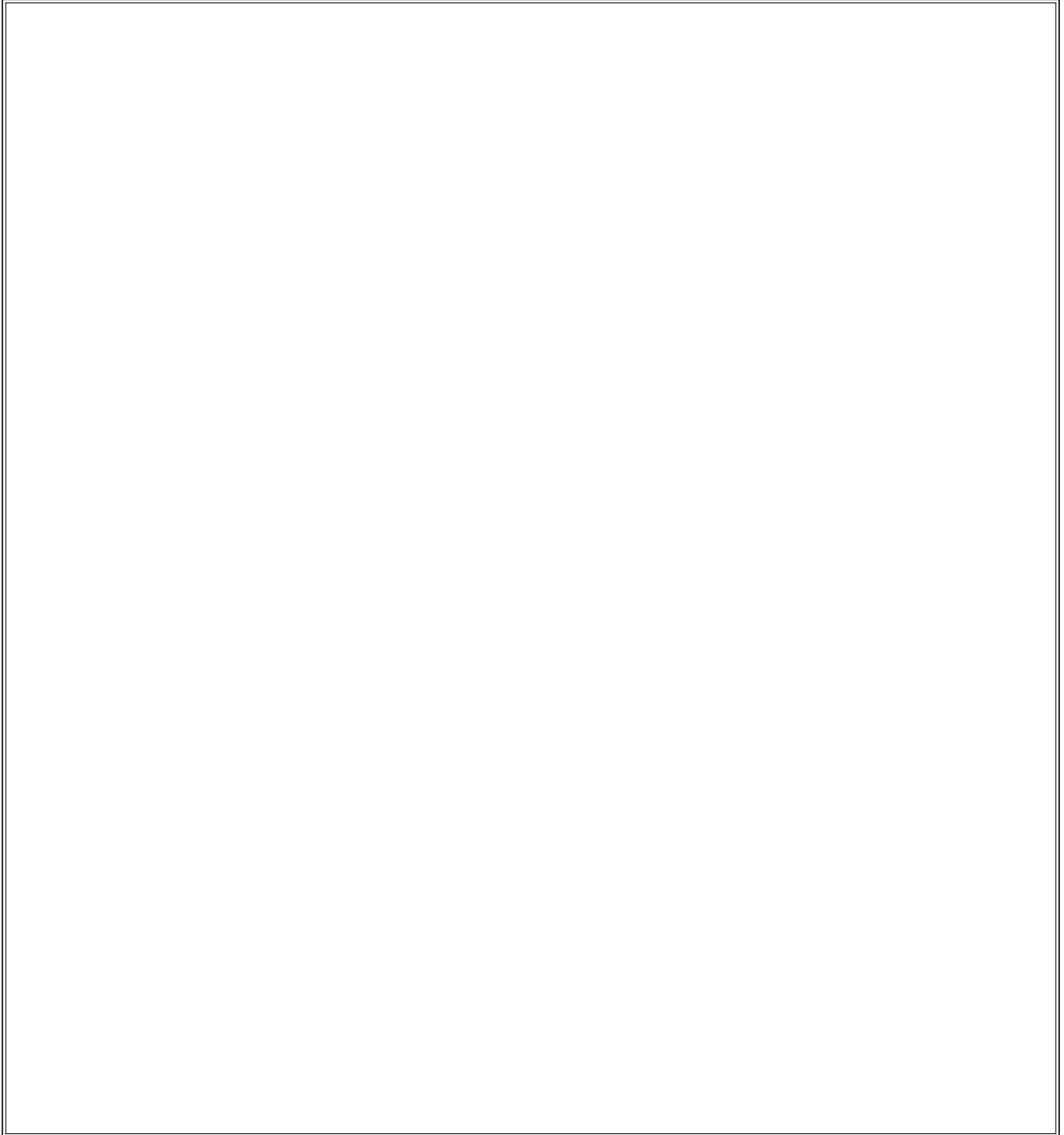
(א) הוכיחו כי T יחס שקילות על $\mathbb{N}$.

(ב) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים

$$[2^n]_T = \{m \in \mathbb{N} \mid 2^n \leq m < 2^{n+1}\}$$

(כאשר $[2^n]_T$ היא מחלקת השקילות של המספר 2^n).

דף נוסף לשאלה מספר ____



דף נוסף לשאלה מספר ____

3. (8 נקודות כל סעיף) שימו לב: במבחן הזה, 0 אינו מספר טבעי ($0 \notin \mathbb{N}$).
נגדיר יחס על $A = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ כך fRg אם

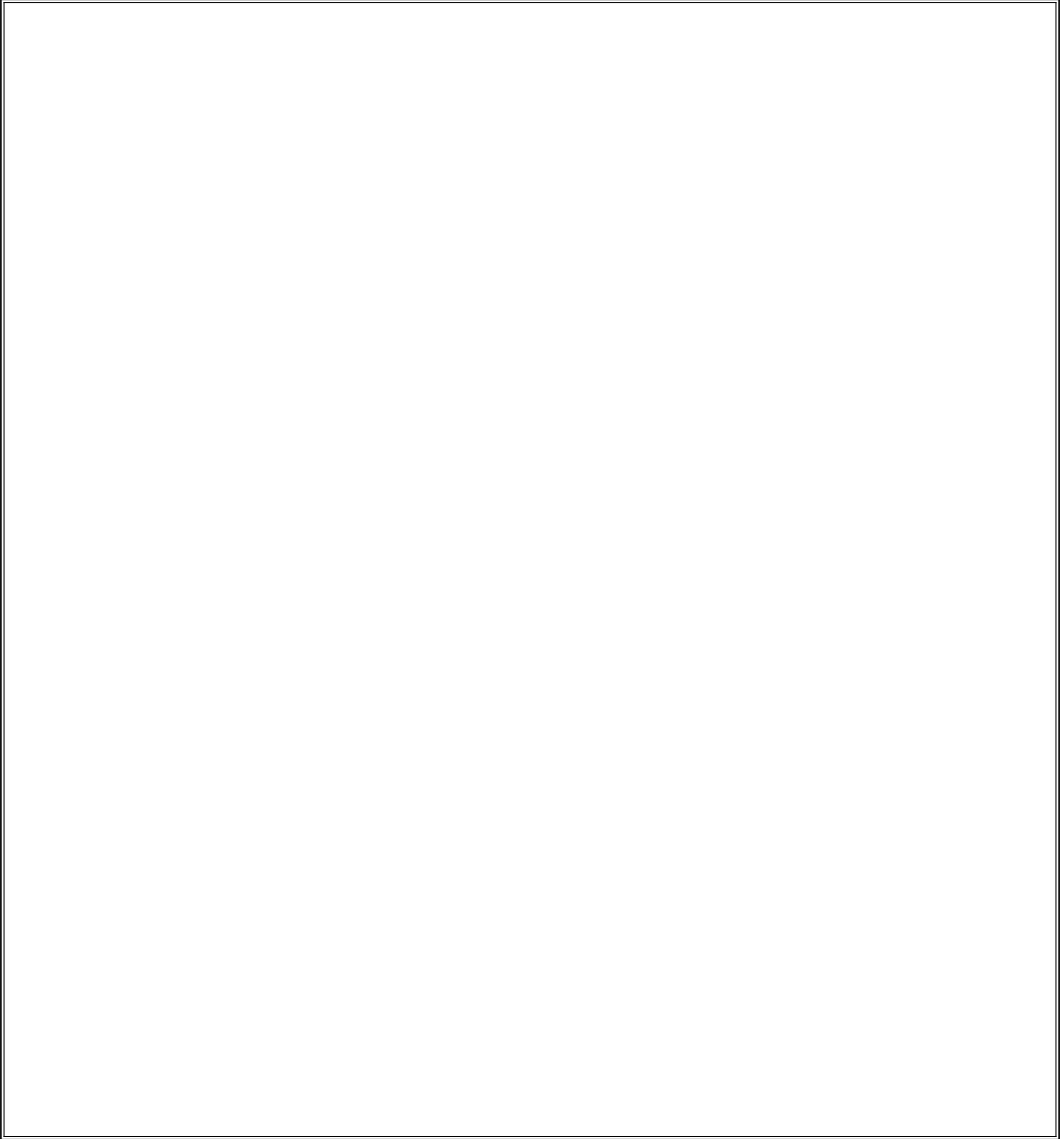
$$(f = g) \vee (\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = f(n)g(n))$$

(א) הוכיחו ש R יחס סדר על A .

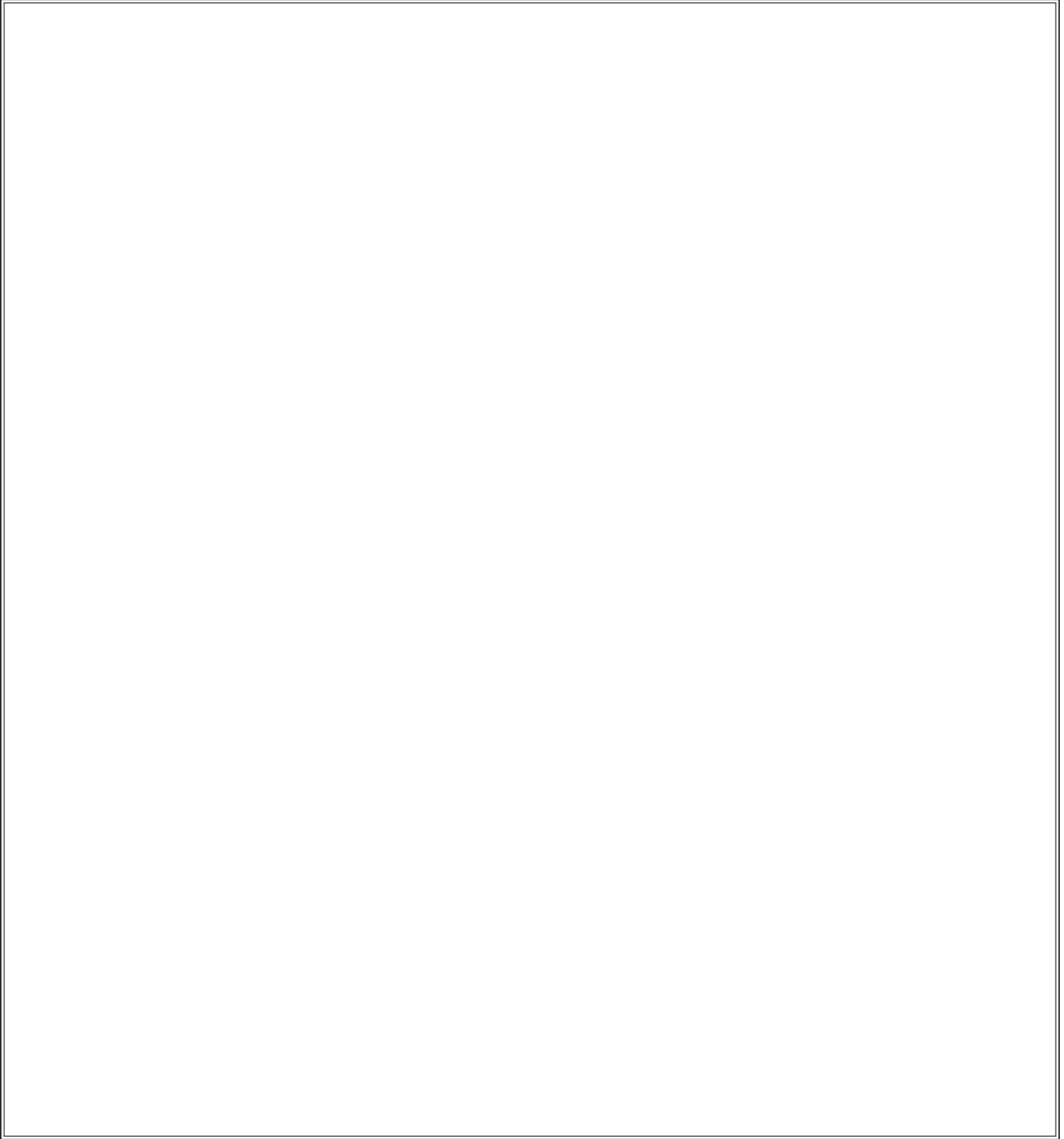
(ב) מצאו את כל האיברים המקסימאליים והאיברים המינימאליים בקבוצה A עם היחס R .

(ג) הוכיחו/הפריכו: היחס R הוא יחס סדר לינארי/קווי (כל קבוצה והמינוח שראתה בהרצאה) על A .

דף נוסף לשאלה מספר ____



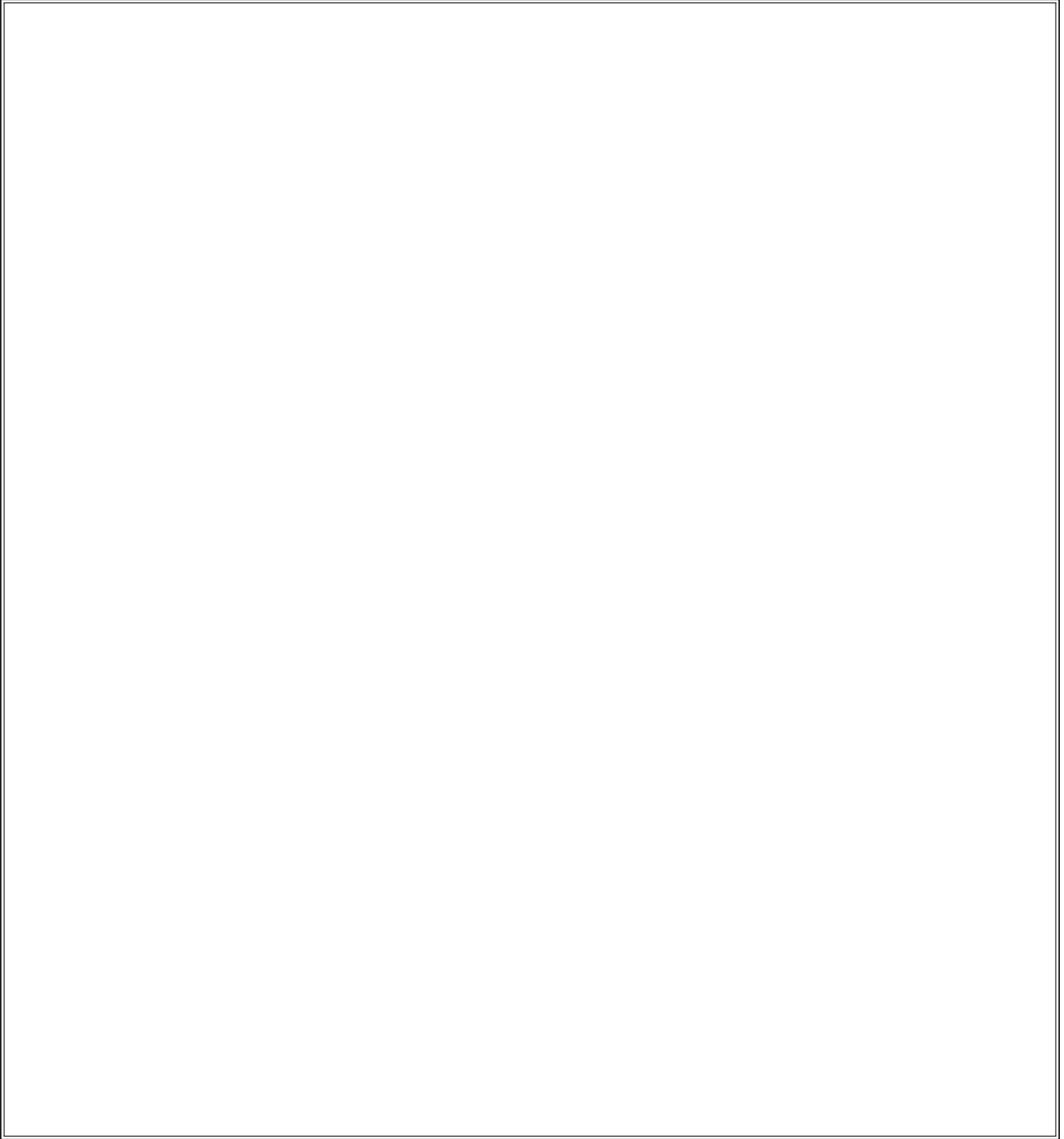
דף נוסף לשאלה מספר ____

A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying the central portion of the page. It is intended for the student to provide a written answer to the question.

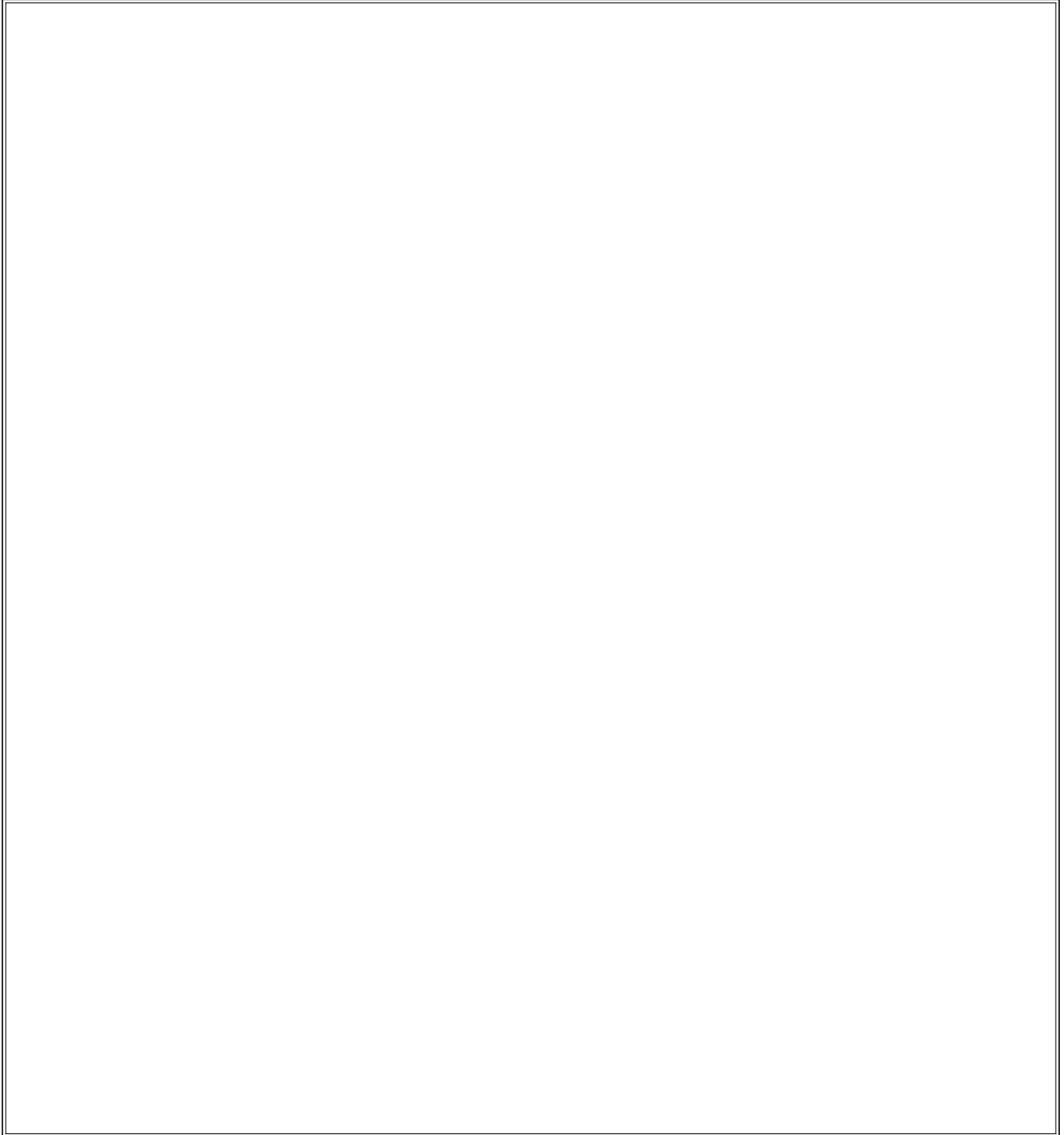
4. (8 נקודות כל סעיף) תהא A קבוצה עם לפחות 3 איברים (כלומר $|A| \geq 3$). נסמן ב S את קבוצת כל תתי הקבוצות של A מעוצמה 2. תהיינה f, g פונקציות מ A ל A . הוכיחו את הבאים:

- (א) אם לכל $X \in S$ מתקיים $f[X] = g[X]$ אזי $f = g$.
- (ב) אם לכל $X \in S$ מתקיים $f^{-1}[X] = g^{-1}[X]$ אזי $f = g$.

דף נוסף לשאלה מספר ____



דף נוסף לשאלה מספר ____



5. יחס S על $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ יקרא מגניב בריבוע אם לכל שני זוגות סדורים שונים $(a, b) \neq (c, d)$ ב S מתקיים

$$ad - bc \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

(א) (8 נקודות) תהא C קבוצה של יחסים מגניבים בריבוע (כלומר: לכל $S \in C$ מתקיים כי S מגניבה בריבוע). נתון כי C שרשרת ביחס להכלה (היינו: לכל $S_1, S_2 \in C$ מתקיים $S_1 \subseteq S_2$ או $S_2 \subseteq S_1$). הוכיחו כי איחוד היחסים ב C ,

$$Y = \bigcup_{S \in C} S$$

הוא יחס מגניב בריבוע גם כן.

(ב) (8 נקודות) הוכיחו שקיים יחס S מגניב בריבוע כך שלכל $(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ מתקיים

$$((a, b) \in S) \vee (\exists (c, d) \in S : ad - bc \in \mathbb{Q}).$$

(ג) יהא S יחס מגניב בריבוע מקסימאלי ביחס להכלה (כלומר לא קיים יחס מגניב בריבוע T המקיים $S \subsetneq T$ ו $T \neq S$).

i. (5 נקודות) נגדיר

$$D = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid (1, x) \notin S\}$$

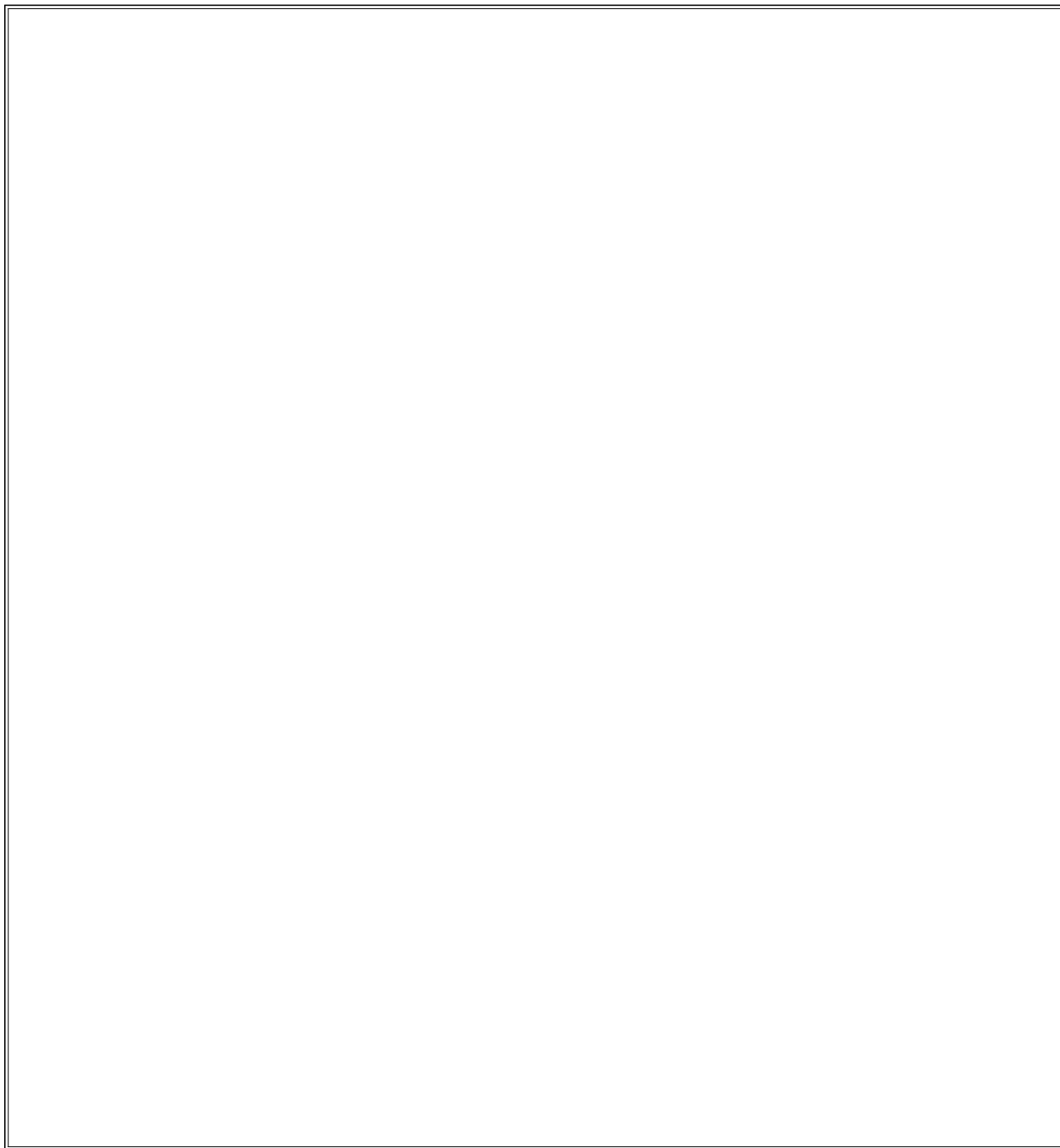
הוכיחו כי $|D| \leq |S| \cdot \aleph_0$. רמז: הקבוצה

$$\left\{ \frac{d-q}{c} \mid (c, d) \in S, q \in \mathbb{Q} \right\}$$

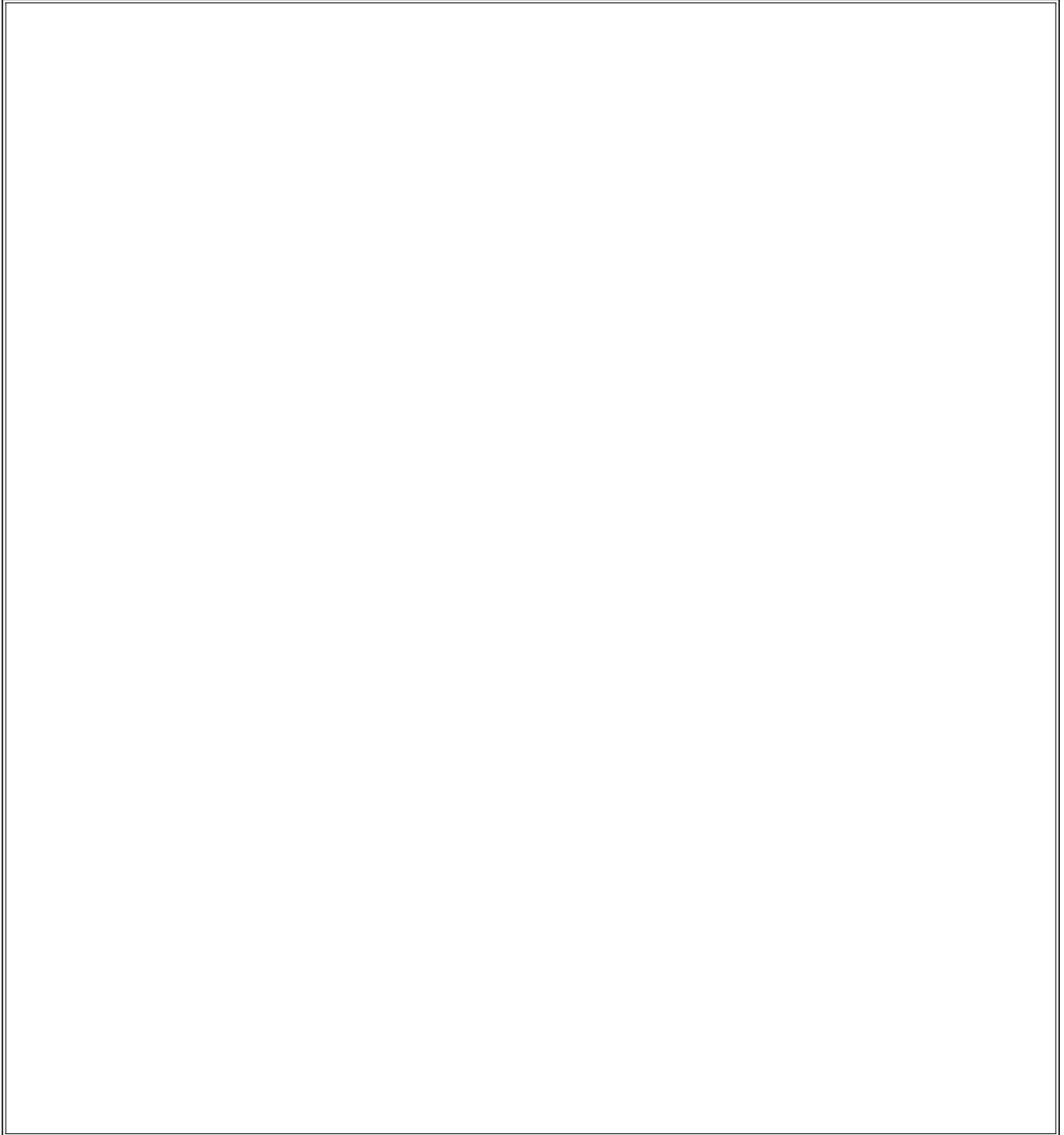
יכולה לעזור.

ii. (4 נקודות) הוכיחו כי S אינו בן מנייה.

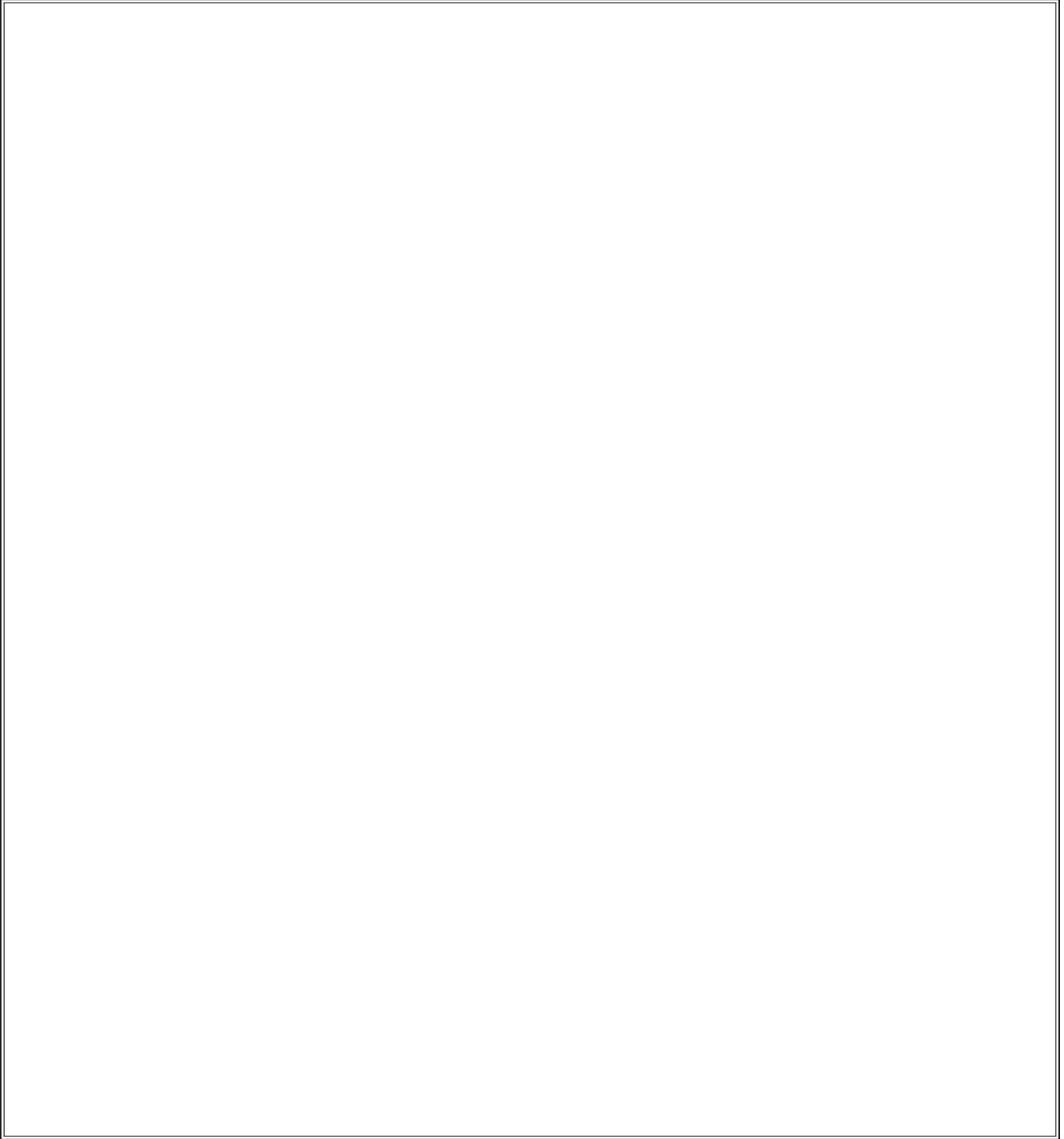
דף נוסף לשאלה מספר ____



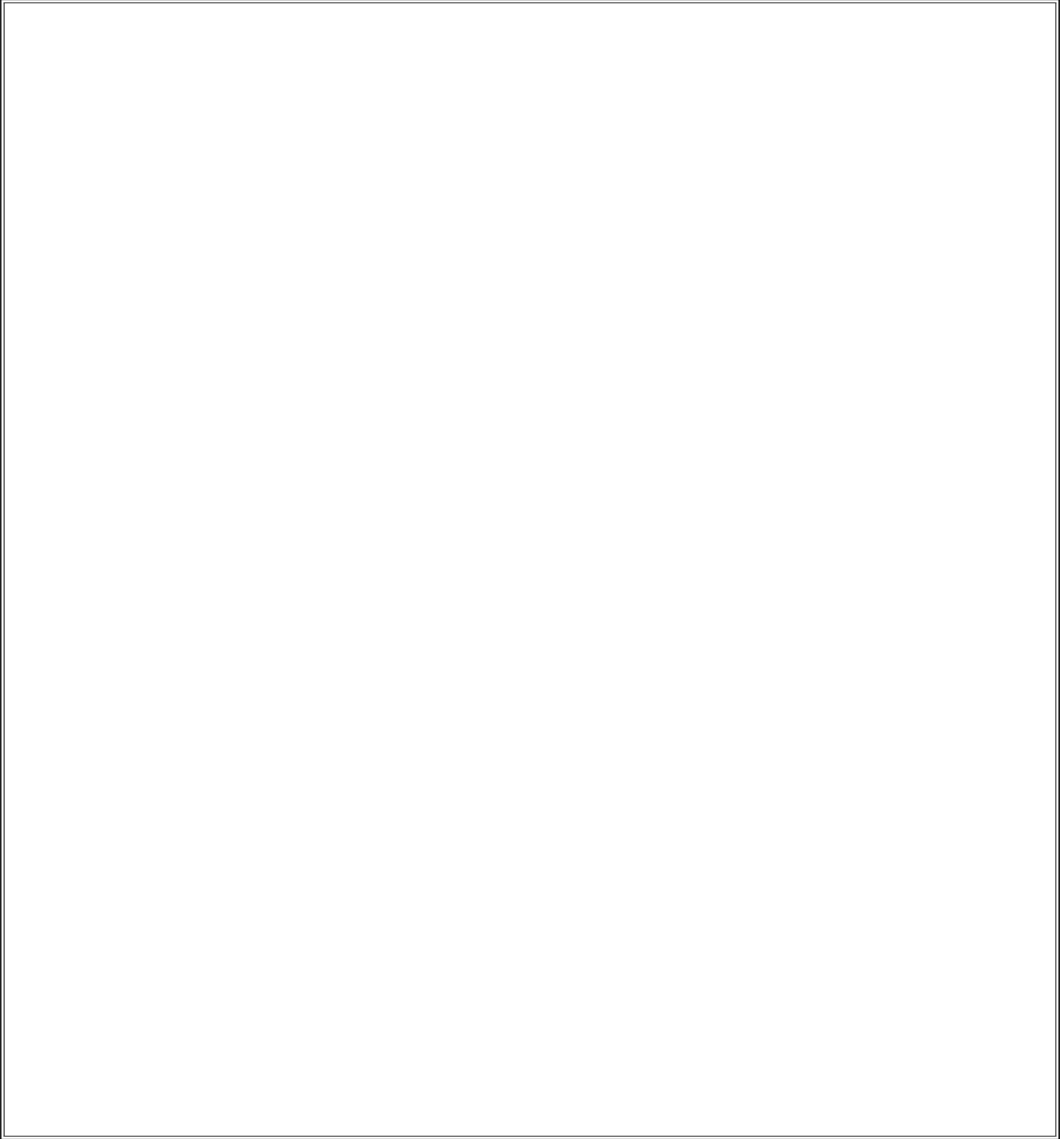
דף נוסף לשאלה מספר ____



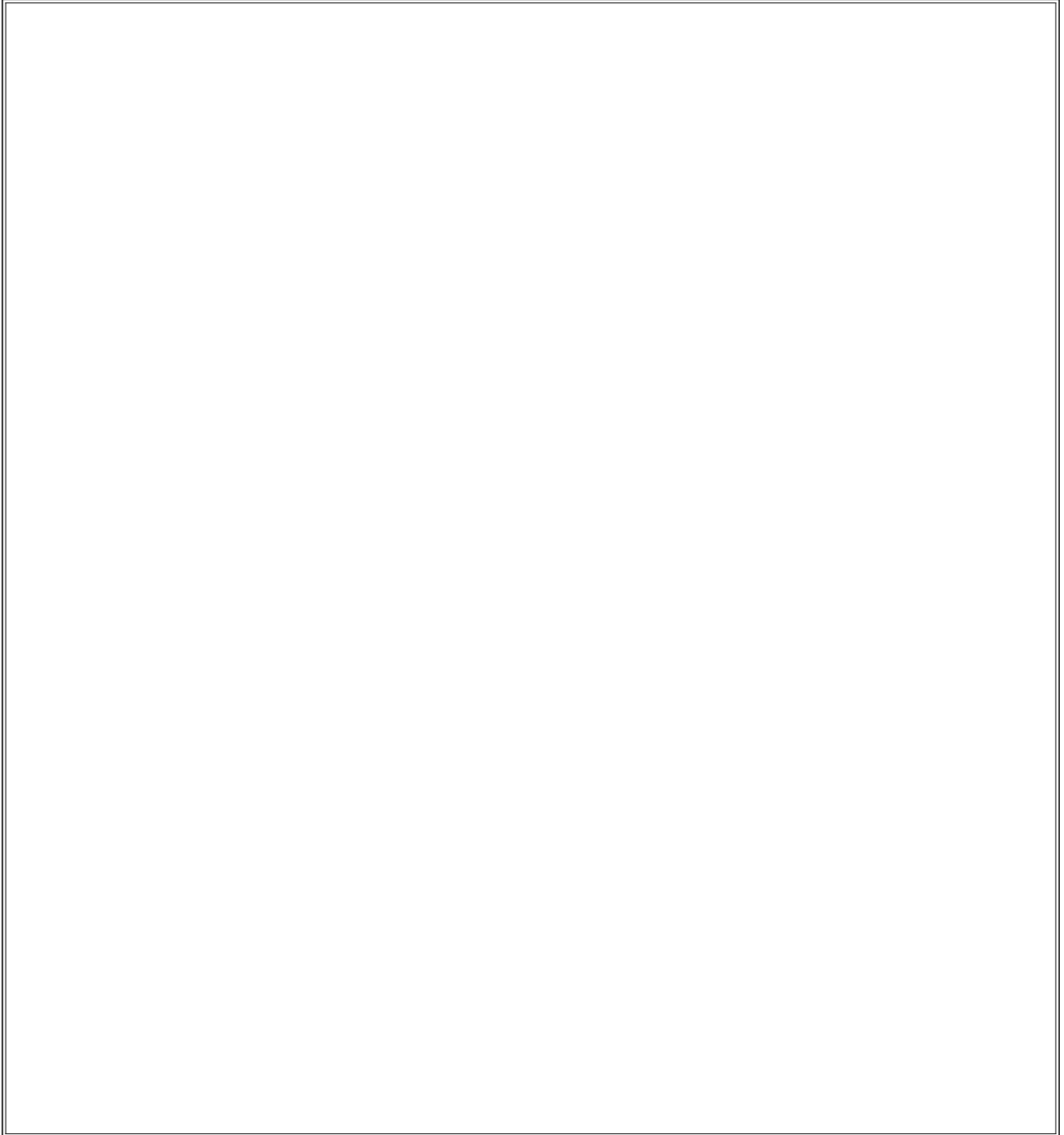
דף נוסף לשאלה מספר ____



דף נוסף לשאלה מספר ____



דף נוסף לשאלה מספר ____

A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying the central portion of the page. It is intended for the student to provide a written answer to the question.